**UNIVERZITET CRNE GORE**
**EKONOMSKI FAKULTET**

DOKTORSKI RAD

# EKONOMETRIJSKO MODELIRANJE RIZIKA NA OSNOVU TEORIJE EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI UZ VIŠEDIMENZIONALNO UOPŠTENJE: PRIMJENA NA CRNU GORU

Julija Cerović

Podgorica, 2014. godine

## PODACI I INFORMACIJE

## PODACI I INFORMACIJE O DOKTORANDU

Ime i prezime: **Julija Cerović**
Datum i mjesto rođenja: **21. jul 1982., Podgorica**
Naziv završenog postdiplomslog studijskog programa i godina završetka: **Magistarske studije (smjer Statistička analiza), Ekonomski fakultet Beograd, 2008. godina.**

## INFORMACIJE O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naziv doktorskih studija: **Doktorske studije Ekonomije**
Naslov teze: **"Ekonometrijsko modeliranje rizika na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti uz višedimenzionalno uopštenje: primjena na Crnu Goru"**
Fakultet na kojem je disertacija odbranjena: **Ekonomski fakultet Podgorica, Univerzitet Crne Gore**

## UDK, OCJENA I ODBRANA DOKTORSKE DISERTACIJE

Datum prijave doktorske teze: **22.09.2009.**
Datum sjednice Senata Univerziteta na kojoj je prihvaćena teza: **17.12.2009.**

Komisija za ocjenu podobnosti teze i kandidata:

**Prof. dr Vesna Karadžić, Ekonomski fakultet Podgorica**
**Prof. dr Vladimir Kašćelan, Ekonomski fakultet Podgorica**
**Prof. dr Marko Backović, Ekonomski fakultet Beograd**

Mentor: **Prof. dr Vesna Karadžić, vanredni profesor, Ekonomski fakultet Podgorica**

Komisija za ocjenu doktorske disertacije:

**Prof. dr Vesna Karadžić, Ekonomski fakultet Podgorica**
**Prof. dr Vladimir Kašćelan, Ekonomski fakultet Podgorica**
**Prof. dr Marko Backović, Ekonomski fakultet Beograd**

Komisija za odbranu doktorske disertacije:

**Prof. dr Vesna Karadžić, Ekonomski fakultet Podgorica**
**Prof. dr Vladimir Kašćelan, Ekonomski fakultet Podgorica**
**Prof. dr Marko Backović, Ekonomski fakultet Beograd**

Datum odbrane: **15.06.2015.**

Datum promocije:

# EKONOMETRIJSKO MODELIRANJE RIZIKA NA OSNOVU TEORIJE EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI UZ VIŠEDIMENZIONALNO UOPŠTENJE: PRIMJENA NA CRNU GORU


## Apstrakt

Koncept vrijednosti pri riziku (Value at risk - VaR) je mjera koja se sve više koristi za ocjenu stepena izloženosti riziku učesnika na finansijskim tržištima. Cilj ovog koncepta, koji je počeo da preovladava u svijetu upravljanja rizikom od 1994. godine, je ocjena maksimalnog gubitka finansijske pozicije u određenom vremenskom periodu za datu vjerovatnoću. Razvijen je veliki broj metoda koji kvantifikuju rizik

Ovom doktorskom disertacijom nastoje se prikazati najnoviji metodi za kvantifikovanje tržišnog rizika u teorijskom i praktičnom smislu. Prikazuju se, prije svega, različiti metodi za računanje vrijednosti pri riziku, kao i statističke teorije koje su u osnovi ovih metoda. Naročito se analizira teorija ekstremnih vrijednosti, koja je razvijena u statističkoj literaturi za proučavanje rijetkih (ekstremnih) događaja i njena primjena u VaR-u.

U radu su prikazane ocjene parametara vrijednosti pri riziku koje se zasnivaju na specifičnosti finansijskih vremenskih serija. To su ekonometrijska ocjena, kvantilna (istorijska) ocjena i ocjena na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti. Ekonometrijska ocjena se izvodi iz GARCH modela, koji se koriste da bi se opisala vremenski promjenljiva uslovna varijansa prinosa. Ocjena po teoriji ekstremnih vrijednosti se zasniva na modeliranju repa empirijske raspodjele. Dalje, razvija se multivarijantni pristup ekstremnih vrijednosti u određivanju vrijednosti pri riziku (VaR) i očekivanog gubitka (ES – Expected Shortfall). Ovaj pristup primjenjuje ključne rezultate univarijantne teorije ekstremnih vrijednosti odvojeno na niz ortogonalnih slučajnih promjenljivih, pod uslovom da su nezavisne i identično raspodijeljene.

Istraživanje u okviru ove disertacije je motivisano željom da se riziku u Crnoj Gori posveti potrebna pažnja, i da se ozbiljnije pristupi njegovom kvantifikovanju, kao i samom upravljanju rizikom. Zaista, ukoliko procjena rizika nema dobru statističku podlogu, ocjena vrijednosti različitih tipova rizika je ozbiljno narušena i ne počiva na zdravoj osnovi, što otežava donošenje odluka finansijskom menadžmentu. Stoga je neophodno koristiti iskustva razvijenih svjetskih finansijskih institucija koje studiozno pristupaju upravljanju rizikom, kao i najnovijih teorijskih znanja, čime će se doprinijeti razvoju nauke iz oblasti finansijske ekonometrije i korporativnog upravljanja u zemlji i širem regionu.



Ključne riječi:

Teorija ekstremnih vrijednosti, tržišni rizik, parametar vrijednosti pri riziku, očekivani gubitak, finansijske vremenske serije, volatilnost, teški repovi, Bazelski standardi, RiskMetrics, GARCH model, metod blok maksimuma i vrhova iznad datog praga, uopštena Pareto raspodjela, ekstremni indeks, ortogonalizacija, ARMA-GARCH.

# ECONOMETRIC MODELING OF RISK ON THE BASIS OF EXTREME VALUE THEORY WITH MULTIDIMENSIONAL GENERALIZATION: APPLICATION TO MONTENEGRO


## Abstract

The concept of value at risk (Valaue at Risk - VaR) is a measure that is increasingly used for assessing the level of exposure of financial markets' participants. The aim of this concept, which has begun to prevail in the world of risk management since 1994, is estimation of the maximum loss of financial position at a given time for a given probability. Many methods have been developed to quantify risk.

This dissertation seeks to show the most recent approaches for quantifying market risk in theoretical and practical terms. First of all, different methods are presented for calculating the value at risk, as well as statistical theory underlying these methods. In particular, we analyze the extreme value theory, which was developed in the statistical literature for the study of rare (extreme) events, and its application to VaR.

This paper presents the evaluation of value at risk that is based on the features of financial time series. These are the econometric estimation, quantile (historical) estimation and estimation based on extreme value theory . The econometric estimation is derived from a GARCH model, which is used to describe the time-variable conditional variance of returns. The estimate regarding extreme value theory is based on modeling the tail of the empirical distribution. Next, a multivariate extreme value approach is developed in determining value at risk (VaR) and expected loss (ES - Expected shortfall). This approach applies the key results of the univariate extreme value theory separately in a series of orthogonal random variables, provided that they are independent and identically distributed.

The research of this dissertation is motivated by the desire that necessary attention is given to risks in Montenegro, and to approach quantifying and managing risk more seriously. Indeed, if the risk assessment has no good statistical basis, assessing the value of different types of risks is seriously compromised and doesn't rely on a sound basis, which complicates decision making to financial management. Therefore, it is necessary to use the experience of the developed world's financial institutions which have studious approach to risk management, as well as the latest theoretical knowledge, thus contributing to the development of science in the field of financial econometrics and corporate management in the country and the wider region.



Key words:

Extreme value theory, market risk, Value at risk (VaR), expected shortfall, financial time series, volatility, fat tails, Basel accords, RiskMetrics, GARCH model, method of block maxima and peak over threshold, generalized Pareto distribution, extreme index, ortogonalization, ARMA-GARCH.

# SADRŽAJ

**I UVOD** **12**
1.1. Aktuelnost istraživanja 12
1.2. Motivi za izradu teme i očekivanja od teze 13
1.3. Osnovni cilj istraživanja 14
1.4. Zadaci istraživanja 14
1.5. Teorijsko-hipotetički okvir istraživanja 15
1.6. Metodologija i instrumenti istraživanja 16
1.7. Dokumentaciona osnova istraživanja, način prikupljanja i obrada dokumentacije 17
1.8. Struktura rada 17

**II PARAMETAR VRIJEDNOSTI PRI RIZIKU (VaR) I DRUGE MJERE RIZIKA** **22**
2.1. Rizik i vrste rizika 22
2.2. Karakteristike finansijskih vremenskih serija 24
2.2.1. Kratki osvrt na osnovne pojmove finansijskih vremenskih serija 25
2.2.2. Volatilnost finansijskih vremenskih serija 30
2.3. Mjere rizika 31
2.4. Kontrola rizika 35
2.4.1. Bazelski standardi 36
2.4.2. Akademski osvrt na Bazel III 39
2.4.3. Implementacija Bazelskih standarda u Crnoj Gori 40
2.5. Metodologije VaR-a 43
2.5.1. Parametarski modeli 44
2.5.1.1. GARCH model 44
2.5.1.2. RiskMetrics 49
2.5.2. Neparametarski modeli 53
2.5.2.1. Istorijska simulacija – kvantilna ocjena 53
2.5.2.2. Hibridni model – eksponencijalno ponderisani model istorijske simulacije (EWHS) 55
2.5.2.3. Volatilno ponderisani model istorijske simulacije (VWHS) 55
2.5.2.4. Filtrirana istorijska simulacija (FHS) 56
2.5.3. Semiparametarski modeli 57
2.5.3.1. CAViaR (Uslovni autoregresioni parametar vrijednosti pri riziku) 58
2.5.3.2. GARCH model kvazimaksimalne vjerodostojnosti 60

**III TEORIJA EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI** **63**
3.1. Metod blok maksimuma 64
3.1.1. Uopštena raspodjela ekstremnih vrijednosti 65
3.1.2. Oblast privlačenja maksimuma 68
3.1.3. Ocjena parametara metodom blok maksimuma 70
3.1.3.1. Metod maksimalne vjerodostojnosti 71
3.1.3.2. Metod regresije 74
3.1.3.3. Neparametarski pristup 76
3.1.4. VaR za duži vremenski period 77
3.1.5. Nivo prinosa (Return level) 77

3.2. Metod vrhova iznad datog praga 78
3.2.1. Uopštena Pareto raspodjela 80
3.2.2. Poissonov proces tačaka 81
3.2.3. Biranje praga *u* 83
3.2.4. Ocjene parametara metodom vrhova iznad datog praga 84
3.2.5. Objašnjavajuće promjenljive 88
3.2.6. Provjera modela 90
3.3. Ekstremne vrijednosti strogo stacionarnih vremenskih serija 92
3.3.1. Ekstremni indeks 92
3.3.2. Ocjena ekstremnog indeksa 97
3.3.2.1. Metod blokova 97
3.3.2.2. Metod rokova 99
3.3.3. Parametar VaR za stacionarne vremenske serije 100

**IV MULTIVARIJACIONO UOŠTENJE TEORIJE EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI 103**
4.1. Ortogonalizacija – Pristup analize glavnih komponenata i Cholesky dekompozicija 104
4.2. Filtracija serijske korelacije i grupisanja uslovne varijanse 109
4.2.1. ARMA proces 109
4.2.2. GARCH model za modeliranje uslovne varijanse 110
4.3. Ocjena VaR-a i ES-a (očekivanog gubitka) 114
4.3.1. Ocjena parametara po uopštenom metodu momenata 114
4.4. Prognoziranje parametara 117
4.5. Ocjenjivanje multivarijantnih parametara VaR-a i ES-a 118

**V EMPIRIJSKA ANALIZA 121**
5.1. Modeliranje VaR-a jedne akcije primjenom različitih metoda 121
5.1.1. Komparativna analiza rezultata jednodimenzionog modela (prinosi akcija EPCG) 138
5.2. Modeliranje VaR-a tržišnog indeksa MONEX20 primjenom različitih metoda 140
5.2.1. Metodologija za izračunavanje indeksa MONEX20 141
5.2.2. Parametar vrijednosti pri riziku (VaR) tržišnog indeksa MONEX20 144
5.2.3. Komparativna analiza rezultata jednodimenzionog modela (tržišni indeks MONEX20) 161
5.3. Modeliranje VaR-a određenog portfolija primjenom različitih metoda 163
5.3.1. Komparativna analiza rezultata dvodimenzionog modela 169

**VI ZAKLJUČAK 172**

**VII LITERATURA 178**

**VIII STATISTIČKI DODATAK 188**

# INDEKS GRAFIKA

**Grafik 3.1.** Frešeova, Vejbulova i Gumbelova funkcija gustine raspodjele **67**

**Grafik 3.2.** Grafički prikaz ideje izbora podataka u analizi: metod blok maksimuma (lijevi grafik) i metod vrhova iznad datog praga (desni grafik) **79**

**Grafik 5.1.** Dnevna stopa prinosa EPCG **122**

**Grafik 5.2.** Q-Q dijagram dnevne stope prinosa akcija EPCG u odnosu na normalnu raspodjelu **123**

**Grafik 5.3.** Funkcije autokorelacije (ACF) i parcijalne autokorelacije za seriju EPCG **124**

**Grafik 5.4.** Funkcije autokorelacije serije logaritmovanih prinosa akcije EPCG **124**

**Grafik 5.5.** Funkcije autokorelacije standardizovanih reziduala modela ARMA(1,3)-GARCH(1,1) **125**

**Grafik 5.6.** Dijagrami rasturanja Hilove ocjene za dnevne stope prinosa EPCG, pozitivni i negativni prinosi **129**

**Grafik 5.7.** Dijagram rasturanja reziduala za prilagođavanje raspodjeli ekstremnih vrijednosti za dnevne negativne logaritamske prinose EPCG, za podperiode od 21 dan **131**

**Grafik 5.8.** Q-Q grafik reziduala za prilagođavanje raspodjeli ekstremnih vrijednosti, naspram normalne raspodjele, za dnevne negativne logaritamske prinose EPCG, za podperiode od 21 dan **132**

**Grafik 5.9.** Grafik intervala povjerenja za nivo prinosa akcija EPCG (na osnovu logaritmovane funkcije vjerodostojnosti) **133**

**Grafik 5.10.** Q-Q dijagram prekoračenja iznad datog praga 2.5% za negativne stope prinosa akcija EPCG **134**

**Grafik 5.11.** Grafik funkcije srednjeg prekoračenja za negativne stope prinosa akcija EPCG**134**

**Grafik 5.12.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG **135**

**Grafik 5.13.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele repu raspodjele prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG **136**

**Grafik 5.14.** Dijagram rasturanja reziduala prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG **137**

**Grafik 5.15.** Q-Q dijagram reziduala prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG **137**
**Grafik 5.16.** Dnevna stopa prinosa tržišnog indeksa MONEX20 **144**
**Grafik 5.17.** Q-Q dijagram dnevne stopa prinosa tržišnog indeksa MONEX20 u odnosu na normalnu raspodjelu **145**
**Grafik 5.18.** Funkcije autokorelacije (ACF) za seriju MONEX20 **145**
**Grafik 5.19.** Funkcije parcijalne autokorelacije za seriju MONEX20 **146**
**Grafik 5.20.** Funkcije autokorelacije kvadriranih standardizovanih reziduala modela ARMA(2,0)-GARCH(1,1) **147**
**Grafik 5.21.** Q-Q dijagram standardizovanih reziduala ocijenjenog modela ARMA(2,0)-GARCH(1,1) **148**
**Grafik 5.22.** Empirijska funkcija gustine raspodjele standardizovanih reziduala ocijenjenog modela ARMA(2,0)-GARCH(1,1) **149**
**Grafik 5.23.** Dijagrami rasturanja Hilove ocjene za dnevne stope prinosa indeksa MONEX20, pozitivni i negativni prinosi **151**
**Grafik 5.24.** Dijagram rasturanja reziduala za prilagođavanje raspodjeli ekstremnih vrijednosti za dnevne negativne logaritamske prinose indeksa MONEX20, za podperiode od 21 dan **153**
**Grafik 5.25.** Q-Q dijagram reziduala za prilagođavanje raspodjeli ekstremnih vrijednosti za dnevne negativne logaritamske prinose indeksa MONEX20, za podperiode od 21 dan **154**
**Grafik 5.26.** Grafik intervala povjerenja za nivo prinosa tržišnog indeksa MONEX20 (na osnovu logaritmovane funkcije vjerodostojnosti) **155**
**Grafik 5.27.** Q-Q dijagram prekoračenja iznad datog praga 2.5% za dnevne negativne logaritamske prinose tržišnog indeksa MONEX20 **156**
**Grafik 5.28.** Funkcija srednjeg prekoračenja za dnevne negativne logaritamske prinose tržišnog indeksa MONEX20 **156**
**Grafik 5.29.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa tržišnog indeksa MONEX20 **158**
**Grafik 5.30.** Dijagram prilagođavanja repa uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa tržišnog indeksa MONEX20 **158**

**Grafik 5.31.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele dnevnim negativnim logaritmovanim prinosima indeksa MONEX20 – dijagram rasturanja reziduala **159**

**Grafik 5.32.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele dnevnim negativnim logaritmovanim prinosima indeksa MONEX20 – Q-Q dijagram reziduala **160**

**Grafik 5.33.** Vremenska serija dnevnih logaritmovanih prinosa akcije TECG **164**

**Grafik 5.34.** Q-Q dijagram dnevne stopa prinosa akcija TECG u odnosu na normalnu raspodjelu **165**

**Grafik 5.35.** Ocijenjene uslovne korelacije reziduala prinosa portfolija kroz vrijeme **167**

# INDEKS TABELA

**Tabela 5.1.** Osnovne deskriptivne statistike dnevne stope prinosa akcija EPCG **123**

**Tabela 5.2.** Testovi ARMA(1,3)-GARCH(1,1) modela: test-statistike i *p*-vrijednosti **125**

**Tabela 5.3.** Ekonometrijska ocjena VaR-a za period od 1 do 5 dana (stopa prinosa EPCG)**126**

**Tabela 5.4.** Rezultati Hilove ocjene VaR-a za stopu prinosa EPCG **129**

**Tabela 5.5.** Ocjene parametara raspodjele ekstremne vrijednosti dobijene metodom maksimalne vjerodostojnosti za dnevne logaritamske prinose EPCG **130**

**Tabela 5.6.** Ocjene rezultata dvodimenzionog Poisson-ovog modela dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG **135**

**Tabela 5.7.** Ocjene rezultata vrijednosti parametra pri riziku i očekivanog gubitka na osnovu metoda vrhova iznad datog praga za stopu prinosa EPCG **138**

**Tabela 5.8.** Sastav indeksa MONEX20 – 15.09.2013. **143**

**Tabela 5.9.** Osnovne deskriptivne statistike dnevne stopa prinosa tržišnog indeksa MONEX20 **144**

**Tabela 5.10.** Testovi ARMA(2,0)-GARCH(1,1) modela: test-statistike i *p*-vrijednosti **147**

**Tabela 5.11.** Ekonometrijska ocjena VaR-a za period od 1-5 dana (stopa prinosa MONEX20) **148**

**Tabela 5.12.** Rezultati Hilove ocjene VaR-a za stopu prinosa tržišnog indeksa MONEX20**151**

**Tabela 5.13.** Ocjene parametara raspodjele ekstremne vrijednosti dobijene metodom maksimalne vjerodostojnosti za dnevne logaritamske prinose tržišnog indeksa MONEX20 **152**

**Tabela 5.14.** Ocjene rezultata dvodimenzionog Poisson-ovog modela dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa tržišnog indeksa MONEX20 **157**

**Tabela 5.15.** Ocjene rezultata vrijednosti parametra pri riziku i očekivanog gubitka na osnovu metoda vrhova iznad datog praga za seriju MONEX20 **160**

**Tabela 5.16.** Osnovne deskriptivne statistike dnevne stope prinosa akcija TECG **163**

**Tabela 5.17.** Ocjene rezultata vrijednosti parametara GARCH(1,1) modela za 3 različita metoda ocjene (za odabrani portfolio) **166**

**Tabela 5.18.** Ocjena VaR-a portfolija (5% i 1% kvantil) bivarijantnog GARCH(1,1) modela konstantne korelacije **169**

# I UVOD

## 1.1. Aktuelnost istraživanja

Rizik ekstremnih događaja je prisutan u svim sferama upravljanja rizikom. Događaji kao što su finansijske krize i slomovi tržišta su pokazali da je neophodno kvantifikovati rizik i odrediti vjerovatnoću i iznos ekstremno velikih gubitaka. Vrijednost pri riziku (u literaturi VaR – Value at Risk) je najzastupljenija i vrlo popularna mjera u metodologiji mjerenja upravljanja tržišnim rizikom u bankama i finansijskim institucijama. Koncept ove mjere se koristi za ocjenu stepena izloženosti riziku učesnika na finansijskim tržištima. Cilj koncepta je ocjena parametra koji predstavlja maksimalni gubitak finansijske pozicije u određenom periodu vremena za datu vjerovatnoću.

Koncept je počeo da preovladava u svijetu upravljanja rizikom 1994. godine, kada je kompanija J. P. Morgan objavila metodologiju koja stoji iza sistema RiskMetrics. Ubrzo nakon toga, za ovaj koncept je ispoljeno i akademsko interesovanje kroz prve knjige koje su se detaljnije bavile njegovim teorijskim okvirom. VaR je ubrzo ušao u ključne oblasti bankarstva kao što su alokacija kapitala, optimizacija portfolija i limitiranje rizika. Sa porastom interesovanja za mjeru VaR i njene važnosti, regulatori finansijskih tržišta su lako prihvatali ovu mjeru kao važeću. Tome svjedoči činjenica da se standardi Bazela II i III za tržišni rizik zasnivaju upravo na VaR-u.

Dvostruka je aktuelnost ovih istraživanja. S jedne strane, sa teorijskog aspekta, primjenjuje se teorija ekstremnih vrijednosti kao potpuno novi pristup tretiranja ekstremnih događaja. To je metoda kojom se obuhvataju svojstva vremenski promjenljivog varijabiliteta i teških repova empirijske raspodjele prinosa. Ukratko rečeno, primjenom standardnih ekonometrijskih metoda potcjenjuje se parametar vrijednosti pri riziku ukoliko se eksplicitno ne modeliraju teški repovi empirijske raspodjele prinosa. Data teorija se posmatra na dva načina: univarijantno i multivarijantno, a takođe se pokazuje i prognoziranje vrijednosti datih parametara.

S druge strane, nova pravila bazelskog komiteta svakako će biti primjenjivana u našem sistemu. U Crnoj Gori Centralna banka priprema novi Zakon o bankama. Ovim zakonom se predviđa obaveza banaka da primjenjuju važeće bazelske standarde. Primjena bazelskih standarda u Crnoj Gori vršiće se kroz formu standardnog pristupa, koji će senzitivnije mjeriti rizike, u odnosu na dosadašnji pristup.

## 1.2. Motivi za izradu teme i očekivanja od teze

Ovom doktorskom disertacijom nastoje se prikazati najnoviji pristupi za kvantifikovanje tržišnog rizika, u teorijskom i praktičnom smislu. Prikazuju se, prije svega, različiti metodi za računanje vrijednosti pri riziku, kao i statističke teorije koje stoje iza ovih metoda. Posebno, razmatra se teorija ekstremnih vrijednosti razvijena u statističkoj literaturi za proučavanje rijetkih (ekstremnih) događaja i njena primjena u VaR-u. Takođe se predstavlja i multivarijantni metod ove teorije za mjerenje rizika, koji se bazira na odvojenim ocjenama univarijantnog modela.

Ovaj metodološki okvir se po prvi put obrađuje u domaćoj literaturi, i empirijski se primjenjuje na podatke finansijskog tržišta Crne Gore, koje je još uvijek u povoju.

Sama tematika je motivisana željom da se riziku u Crnoj Gori posveti potrebna pažnja, i da se ozbiljnije pristupi njegovom kvantifikovanju, kao i samom upravljanju rizikom. Naime, ukoliko procjena rizika nema dobru statističku podlogu, sama ocjena vrijednosti različitih tipova rizika je ozbiljno narušena i ne počiva na zdravoj osnovi. Samim tim, i nije od velike pomoći prilikom donošenja odluka finansijskom menadžmentu. Stoga je neophodno koristiti iskustva razvijenih svjetskih finansijskih institucija koje studiozno pristupaju upravljanju rizikom, kao i najnovijih teorijskih znanja, čime će se doprinijeti razvoju nauke iz oblasti finansijske ekonometrije i korporativnog upravljanja u zemlji i širem regionu.

## 1.3. Osnovni cilj istraživanja

Osnovni cilj ove doktorske disertacije je prikaz ocjena parametara vrijednosti pri riziku koje se zasnivaju na analizi specifičnosti finansijskih vremenskih serija. To su ekonometrijska ocjena, kvantilna (istorijska) ocjena i ocjena na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti. Ekonometrijska ocjena se izvodi iz GARCH modela, koji se koriste da bi se opisala vremenski promjenljiva uslovna varijansa prinosa. Ocjena po teoriji ekstremnih vrijednosti se zasniva na modeliranju repa empirijske raspodjele, čime se ne nameće često nerealna pretpostavka o normalnoj raspodjeli prinosa.

Dalje, razvija se multivarijantni pristup ekstremnih vrijednosti u određivanju vrijednosti pri riziku (VaR) i očekivanog gubitka (ES – Expected Shortfall). On se zasniva na činjenici da se neki ključni rezultati univarijantne teorije ekstremnih vrijednosti mogu primijeniti odvojeno na niz ortogonalnih slučajnih promjenljivih, pod uslovom da su nezavisne i identično raspodijeljene. Takve slučajne promjenljive se mogu konstruisati iz glavnih komponenata uslovnih reziduala iz ARMA-GARCH modela multivarijantnih serija prinosa. Nakon toga se praktično testira model za prognozu.

Rezultatima se nastoji pokazati da je uopštena Pareto raspodjela vrhova iznad datog praga reziduala dobra za „hvatanje“ ekstremnih događaja. Drugim riječima, testiranje modela pokazuje da su njegove prognoze VaR-a preciznije u odnosu na uobičajene metode koji se baziraju na uslovnoj normalnosti, uslovnoj t-raspodjeli ili istorijskoj simulaciji.

## 1.4. Zadaci istraživanja

Osnovni zadaci polaznog istraživanja, a samim tim i doktorske disertacije su:

- Prikaz teorijskog okvira koji se koristi u tretiranju ekstremnih događaja, računanju VaR-a i očekivanog gubitka, kao aktuelnoj temi iz oblasti Finansijske ekonometrije;

- Da se dati ekonometrijski modeli primijene na podatke sa finansijskog tržišta Crne Gore;

- Da se naglasi prepoznata potreba za detaljnijom analizom procjene rizika kod nas, u oblasti finansija i osiguranja.

## 1.5. Teorijsko-hipotetički okvir istraživanja

Osnova teorijsko-hipotetičkog okvira se odnosi na sledeće postavke:

- *Vremenske serije na finansijskim tržištima karakteriše promjenljivost varijabiliteta tokom vremena*. To prije svega važi za stope prinosa finansijskih instrumenata. Svaka nova informacija utiče na učesnike na berzi da kupuju ili prodaju akcije, što dovodi do promjene u njihovim cijenama, a time i u odgovarajućim stopama prinosa. Detaljnije sagledavanje nove informacije može dovesti do pada obima transakcija i smirivanja berze. Na taj način se smjenjuju faze visokog i niskog varijabiliteta. Pri tome, postoji veći stepen korelisanosti između varijabiliteta prinosa nego između nivoa prinosa. Takođe, uočeno je da je varijabilitet izraženiji ako informacija ima negativan karakter. U terminologiji teorije vjerovatnoće ovdje se razmatra uslovna varijansa, odnosno ekonometrijski termin je uslovna heteroskedastičnost. Osnovni tip modela uslovnog varijabiliteta je model uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti – GARCH.

- *Finansijske vremenske serije imaju repove koji su teži od repova normalne raspodjele*. Npr, rep Paretove raspodjele je teži od repa normalne raspodjele. Raspodjele sa teškim repovima imaju značajnu ulogu u modeliranju ekstremnih događaja, što je predmet razmatranja teorije ekstremnih vrijednosti.

- *Ocjene parametara vrijednosti pri riziku na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti su bolje od ekonometrijskih ocjena*. Data hipoteza će se praktično ilustrovati na osnovu finansijskih vremenskih serija sa crnogorskog finansijskog tržišta.

- *Teoriju ekstremnih vrijednosti je moguće proširiti izvan okvira jedne promjenljive*. Multivarijantni pristup ekstremnih vrijednosti u određivanju vrijednosti pri riziku (VaR) i očekivanog gubitka (ES – Expected Shortfall) se zasniva na činjenici da se neki ključni rezultati univarijantne teorije ekstremnih vrijednosti mogu primijeniti odvojeno na niz ortogonalnih slučajnih promjenljivih, pod uslovom da su nezavisne i identično raspodijeljene. Takve slučajne promjenljive se mogu formirati iz glavnih komponenata uslovnih reziduala iz ARMA-GARCH modela multivarijantnih serija prinosa.

## 1.6. Metodologija i instrumenti istraživanja

U radu se koriste metode koje su karakteristične za istraživanja u domenu ekonomskih nauka. Primjenjuje se dijalektička, sintetička i verifikaciona metoda uz istovremenu primjenu ekonometrijskih, statističkih i matematičkih metoda na finansijske vremenske serije. Verifikaciona metoda predstavlja osnovu za provjeru hipoteza od kojih se pošlo u istraživanju.

U cilju postavljanja jasnog istraživačkog zadatka i njegove uspješne realizacije, u radu će se primjenjivati i induktivna, deduktivna i empirijska metoda istraživanja. Takođe, u toku istraživanja biće primijenjeni metodi sistematske i kritičke analize.

Kao što je već pomenuto u hipotezama, zbog izražene vremenske promjenljivosti posmatranih serija, osnovni ekonometrijski model koji se koristi je model uopštene autoregresione uslovne heteroskedastičnosti – GARCH model. Isto tako, i ostali modeli vezani za uslovnu varijansu će se koristiti i prilikom komparativne analize rezultata biće prikazani njihovi nedostaci i prednosti. Uopštenjem teorije ekstremnih vrijednosti na više

serija, ilustrovaće se multivarijaciona analiza portfolija primjenom uopštenog ortogonalnog GARCH modela.

## 1.7. Dokumentaciona osnova istraživanja, način prikupljanja i obrada dokumentacije

U obradi teme glavnu dokumentacionu osnovu čine knjige i udžbenici iz oblasti finansijske ekonometrije, finansija, ekonometrije i statistike. Dalje, korišćeni su naučni članci, radovi, istraživanja i eseji koji se bave pitanjima i problemima analize finansijskih vremenskih serija, modeliranja VaR-a, primjene ekonometrije u finansijama, teorije ekstremnih vrijednosti i modeliranja ekstremnih događaja u finansijama i osiguranju. Tu su brojni stručni časopisi: International Review of Economics and Finance, Journal of Economics and Finance, Journal of Financial Econometrics, Journal of Banking & Finance, Quantitative Finance, Insurance: Mathematics and Economics, International Journal of Forecasting, Journal of Risk Finance itd.

Način prikupljanja podataka realizuje se korišćenjem dostupnih baza podataka i literature, kao i pretraživanjem Internet stranica. Obrada podataka se vrši korišćenjem ekonometrijskih, statističkih i matematičkih programa Eviews, SPSS, R i S-Plus.

## 1.8. Struktura rada

Rad je strukturiran u četiri međusobno tematski i analitički povezane cjeline, uz uvod, zaključak i popis literature. Takođe, na kraju je dat i statistički dodatak koji sadrži programske komande za empirijsku analizu u programu R sa rezultatima.

Nakon uvoda, u drugom poglavlju doktorske disertacije izlaže se detaljna analiza tematike u skladu sa postavljenim ciljevima teze. Finansijska tržišta širom svijeta poslednjih godina pokazuju izrazitu nestabilnost. Zbog toga su dosta kritikovani postojeći

sistemi upravljanja rizikom i istraživane su pogodnije metodologije koje bi se mogle nositi sa rijetkim događajima koji imaju teške posljedice. U ovom dijelu rada se, stoga, najprije definiše rizik, kao i osnovne vrste rizika. Na finansijskim tržištima postoji nekoliko tipova rizika, a tri glavne komponente finansijskog rizika su kreditni, tržišni i operacioni rizik. Posebna pažnja se poklanja tržišnom riziku kao centralnoj temi pogodnoj za analizu i primjenu zbog dostupnosti podataka.

Prije nego što se pređe na mjere rizika, treba razmotriti neke osobine finansijskih vremenskih serija. Prije svega, značajna karakteristika finansijskih vremenskih serija je njihova izražena spljoštenost. Naime, finansijski podaci imaju raspodjelu sa većom koncentracijom vjerovatnoće na krajevima, teškim repovima rasporeda, i jako visokim vrhovima. Dalje, posebna pažnja se daje promjenljivosti varijabiliteta tokom vremena – tzv. volatilnosti, koja je prije svega karakteristika stopa prinosa finansijskih instrumenata. Postoji tendencija grupisanja volatilnosti na finansijskim tržištima. Drugim riječima, očekuje se da će visoke stope prinosa biti praćene visokim stopama prinosa, a niske stope će pratiti takođe niske stope prinosa, bile te stope pozitivne ili negativne. Takođe, primijećeno je da volatilnost, tj. uslovna varijansa više raste kao odgovor na negativnu vijest (npr. visoki pad) nego kao odgovor na pozitivnu vijest istih razmjera.

Osnovne mjere koje se koriste za mjerenje rizika su parametar vrijednosti pri riziku (VaR) i očekivani gubitak (ES). Vrijednost pri riziku je ona vrijednost koju gubitak u datom trenutku ne premašuje, pri određenoj vjerovatnoći. Alternativna mjera, očekivani gubitak, predstavlja očekivanu vrijednost gubitka pod uslovom da smo premašili VaR. Što se tiče kontrole rizika, regulatorna primjena VaR-a vezuje se za Bazelske standarde. Daje se akademski osvrt na Bazel III, standarde za različite vrste rizika kao i implementaciju tih standarda u Crnoj Gori.

U drugom poglavlju se dalje izlažu različite metodologije računanja VaR-a. Prihvaćena je podjela na tri osnovne vrste metoda VaR-a koju su definisali Manganelli i Engle 2001. godine. Prvu grupu čine parametarski modeli (RiskMetrics i GARCH), drugu grupu čine neparametarski modeli, kao što su istorijska simulacija i hibridni model, a treća grupa

obuhvata semiparametarske modele, i to teoriju ekstremnih vrijednosti, CAViaR i GARCH model kvazi-maksimalne vjerodostojnosti. Inače, tip ocjene parametra vrijednosti prema riziku može biti trojak: 1. kvantilna ocjena, 2. ekonometrijska ocjena i 3. ocjena dobijena pomoću teorije ekstremnih vrijednosti. Prve dvije grupe modela su ovdje detaljno opisane, a od semiparametarskih modela se posebna pažnja, u drugom poglavlju, poklanja teoriji ekstremnih vrijednosti, kao novom pristupu modeliranja rizika ekstremnih događaja koji, pokazalo se, daje najbolje rezultate u modeliranju i prognoziranju parametra vrijednosti pri riziku.

Treće poglavlje obuhvata osnovne postulate teorije ekstremnih vrijednosti, koja predstavlja statističku teoriju pogodnu za modeliranje ponašanje vremenskih serija u ekstremima. Sama zainteresovanost finansijskih institucija i investitora za mogućnost upravljanja maksimalnim rizicima kojima su izloženi, otvara prostor za primjenu matematičkih modela ekstremnih slučajnih događaja. Da bi se modelirao rizik, bira se određena raspodjela vjerovatnoće. Ta raspodjela se može ocjenjivati pomoću statističke analize empirijskih podataka. U tom slučaju, teorija ekstremnih vrijednosti omogućava najbolju ocjenu oblasti repova raspodjele. Takođe, čak i u odsustvu korisnih istorijskih podataka, ova teorija je vodič za biranje tipa raspodjele koja će najbolje tretirati ekstremne rizike. Postoje dva glavna tipa modeliranja ekstremnih vrijednosti. Starija grupa modela su modeli blok maksimuma – to su modeli velikog broja opservacija sakupljenih iz velikih uzoraka čije su opservacije identično raspodijeljene. Drugu, savremeniju grupu modela čine modeli vrhova iznad datog praga – modeli svih velikih opservacija koje premašuju visoki određeni prag. Vlada generalno mišljenje da su ovi modeli vrhova iznad datog praga korisniji za praktičnu primjenu, zahvaljujući njihovoj efikasnoj upotrebi (često ograničenih) podataka ekstremnih vrijednosti.

Dakle, može se reći da je teorija ekstremnih vrijednosti veoma važna za upravljanje rizikom, i sve se više koristi u finansijama i osiguranju. Metodi koji se zasnivaju na pretpostavci o normalnoj raspodjeli najčešće potcjenjuju rizik u repovima, dok metodi koji se baziraju na istorijskoj simulaciji mogu da dovedu do veoma nepreciznih ocjena datog rizika. Teorija ekstremnih vrijednosti se pokazala kao metod koji sa naučnog

aspekta najbolje rješava problem predviđanja veličine tj. iznosa rijetkog događaja. Zato se i centralno mjesto u radu upravo posvećuje ovoj teoriji, a kasnije se, u poslednjem poglavlju rada, i empirijski pokazuje da su ocjene rizika dobijene na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti najbolje.

U četvrtom poglavlju rada, nastoji se uopštiti teorija ekstremnih vrijednosti izvan okvira jedne promjenljive. Naime, njen pristup je odličan za upravljanje rizikom, zbog relativno jednostavne primjene, kao i zbog malog broja zahtijevanih pretpostavki. Nažalost, pored tih prednosti postoji i mana – a to je univarijantno ograničenje. U praksi, broj elemenata koji čine određeni portfolio je najčešće veliki. Dakle, obično se radi sa većim brojem faktora rizika, pa i metod mjerenja zahtijeva multivarijantni pristup. Definisanje multivarijantnog modela za ocjenu faktora rizika pod ekstremnim uslovima tržišta je do sad bila veoma izazovna tema. Smith je 2000. godine predstavio sličnu tehniku koja uključuje multivarijantnu verziju teorije ekstremnih vrijednosti, ali kompleksnost modela značajno raste sa porastom broja faktora rizika. Alternativno, zajednička raspodjela prinosa može se posmatrati kao proizvod marginalnih raspodjela i veze. McNeil i Frey (2000) npr, su opisali pristup veze (copula method) za opisivanje strukture faktora rizika između ekstremnih vrijednosti više promjenljivih. Ne samo da ova tehnika uvodi dodatni model rizika, svojstven pretpostavci određene analitičke forme funkcije međuzavisnosti, već ona postaje i prilično neukrotiva sa porastom broja dimenzija. Štaviše, tipičan copula metod za multivarijantnu teoriju ekstremnih vrijednosti, kao što su opisali Nyström i Skoglund (2002), zahtijeva dodatni korak simulacije da bi se opet došlo do reziduala iz zajedničke raspodjele, uz date prilagođene marginalne raspodjele i parametre veze.

Rad uvodi multivarijantni metod teorije ekstremnih vrijednosti za mjerenje rizika koji se bazira na odvojenim ocjenama univarijantnog modela. Ključna pretpostavka jednodimenzionalne teorije ekstremnih vrijednosti je da su ekstremni prinosi nezavisni i da imaju istu raspodjelu. Umjesto ocjenjivanja zajedničke n-dimenzionalne raspodjele (koristeći vezu ili nešto slično) predlaže se metod koji koristi n ortogonalnih serija uslovnih reziduala, koji su aproksimativno nezavisni i imaju jednaku raspodjelu. Ovi reziduali se dobijaju iz glavnih komponenata serija zajedničkog prinosa u kojima nema

autokorelacije, heteroskedastičnosti i asimetrije. Ovo se postiže pretpostavljanjem da proces zajedničkog prinosa prati stacionarni n-dimenzionalni model iz ARMA-GARCH klase. Da bi se metod oslobodio od nepotrebnih pretpostavki o raspodjeli, ARMA-GARCH parametri se ocjenjuju metodom uopštenih momenata.

Poslednju cjelinu rada, prije zaključka, čini empirijska analiza. Modeli se primjenjuju na podatke finansijskog tržišta Crne Gore. Odabrani su najinteresantniji instrumenti, prije svega akcija Elektroprivrede Crne Gore (EPCG) koja je pokazala izraženu volatilnost u prethodnom periodu, i na kojoj se mogu ilustrovati prednosti i nedostaci pojedinih modela. Zatim, zbog posmatranja stanja na tržištu kapitala Crne Gore kao tržišta u razvoju, isti modeli su primijenjeni i na tržišni indeks MONEX20. Sama teorija ekstremnih vrijednosti se može primijeniti na bilo koji aspekt mjerenja rizika, i na bilo koju njegovu vrstu u finansijama i osiguranju, čime joj se obezbjeđuje široka i raznovrsna primjena. Takođe, pored univarijantnog dijela, formira se i određeni portfolio finansijskih instrumenata i modelira rizik u tom višedimenzionom slučaju. Naravno, rezultati su praćeni komparacijom i detaljnim objašnjenjima rezultata.

# II PARAMETAR VRIJEDNOSTI PRI RIZIKU (VaR) I DRUGE MJERE RIZIKA

Koncept vrijednosti pri riziku (Value-at-Risk) je metodološki okvir za ocjenu stepena izloženosti riziku učesnika na finansijskim tržištima. Ovim konceptom se dobija ocjena parametra vrijednosti pri riziku, koji predstavlja maksimalni gubitak finansijske pozicije, pri određenoj vjerovatnoći, u određenom vremenskom periodu. Na osnovu ovog pristupa, finansijske institucije mogu da odrede nivo kapitala koji im osigurava poziciju u uslovima ekstremnih kretanja. VaR se odnosi na sve vrste finansijskog rizika, ali se najviše primjenjuje u analizi tržišnog rizika.

U ovom dijelu disertacije se najprije definiše rizik i navode vrste rizika, a pošto se dalje izučava finansijski rizik, navode se osnovne karakteristike finansijskih serija. Takođe, posebno se razmatraju mjere rizika, a prije metodologije VaR-a, obrađuje se kontrola rizika koja je postavljena Bazelskim standardima, kao i implementacija tih standarda u Crnoj Gori.

## 2.1. Rizik i vrste rizika

Rizik se može definisati na više načina, shodno aspektu sa kog se posmatra. Pod rizikom se najčešće smatra mjerljiva mogućnost nastanka ekonomski štetnog događaja. Definicije rizika se mogu podijeliti u dvije grupe[1]: one koje izjednačavaju rizik i vjerovatnoću ostvarenja štetnog događaja (rizik je vjerovatnoća gubitka ili psihološka neizvjesnost u odnosu na gubitak), i one koje prave razliku između ta dva pojma (rizik je mogućnost da plasirana sredstva neće donijeti očekivanu stopu prinosa). Iako je prihvatljiva svaka definicija koja obuhvata neke elemente rizika, nijedna od njih nije u potpunosti zadovoljavajuća ako se uzmu u obzir svi aspekti rizika.

[1] Kašćelan, V., Novović, M. (2009) Osiguranje i Aktuarska Matematika. Univerzitet Crne Gore, Podgorica, str. 2.

Sa rizikom je povezana neizvjesnost i slučajnost. Ruski matematičar Kolmogorov je još 1933. godine dao aksiomatsku definiciju slučajnosti i vjerovatnoće[2], pa model vjerovatnoće opisuje pomoću uređene trojke $(\Omega, F, \mathrm{P})$. Elemenat ω iz Ω predstavlja realizaciju eksperimenta. Vjerovatnoća ostvarenja događaja A se obilježava sa P(A), gdje je A element iz $F$, skupa svih događaja. P predstavlja mjeru vjerovatnoće.

Prema različitim kriterijumima rizici se dijele na:[3]

- Finansijske i nefinansijske – finansijski podrazumijevaju novčane i materijalne gubitke, za razliku od nefinansijskih koji su emotivne prirode;
- Dinamičke i statičke – dinamički nastaju usljed promjena u privredi (promjena cijena, tražnje, tehnologije) i prouzrokuju finansijske gubitke. Statički rizici su posljedica prirodnih opasnosti ili greške čovjeka, pa su stoga predvidivi;
- Objektivne i subjektivne – objektivni se određuju relativnim odstupanjem stvarnog od očekivanog događaja, i ne zavise od volje čovjeka. S druge strane, subjektivni rizici su rezultat subjektivne percepcije svakog pojedinca;
- Opšte i posebne – opšti se odnose na cjelokupno društvo, a posebni na pojedinca;
- Konstantne i varijabilne – konstantni predstavljaju štetne događaje kod kojih se vjerovatnoća realizacije ne mijenja iz godine u godinu, dok je kod varijabilnih ta vjerovatnoća sklona čestim promjenama, i
- Čiste i špekulativne – čist rizik je onaj kod kojeg postoji šansa gubitka, ali ne i dobiti (npr. kod kasko osiguranja vozila), a špekulativni rizik je rizik gdje postoji šansa gubitka, ali i dobiti (tipičan primjer je kockanje).

Vrsta rizika koji je tema ovog rada je *finansijski rizik*, koji se može definisati kao mjerljiva mogućnost gubitka ili prinosa koji je manji od očekivanog, ili alternativno, kao događaj koji može različito da utiče na sposobnost organizacije da dostigne svoje ciljeve i ispunjava svoje strategije. Finansijski rizik se dijeli na tržišni, kreditni, operativni i rizik likvidnosti.

---

[2] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press, Princeton, str. 1.
[3] Kočović, J., Šulejić, P. (2002) Osiguranje. Ekonomski fakultet Beograd, Beograd, str. 65.

U bankarstvu, najpoznatiji rizik je *tržišni rizik*, koji predstavlja rizik promjene u vrijednosti finansijske pozicije zbog promjena u vrijednosti komponenti od kojih ta pozicija zavisi, kao na primjer cijene akcija i obveznica, valutni kurs itd. *Kreditni rizik* je sledeća bitna kategorija finansijskog rizika, i predstavlja rizik od neisplaćivanja ugovorenih obaveza po osnovu investicija, kao što su zajmovi i obveznice. U poslednje vrijeme veliku pažnju dobija i *operativni rizik* koji se definiše kao rizik gubitaka koji nastaju kao posljedica neadekevatnog ili neuspjelog internog procesa, ljudi i sistema, ili eksternih događaja. Često nije moguće napraviti jasnu razliku između ova tri tipa finansijskog rizika, niti oni iscrpljuju moguće rizike koji utiču na finansijske institucije.

Postoje elementi rizika koji se javljaju u svim njegovim kategorijama kao što je rizik likvidnosti i rizik modela. Pod *rizikom likvidnosti* se podrazumijeva rizik koji proizilazi iz nedostatka tržišnosti investicije, koja na taj način ne može dovoljno brzo da se kupi ili proda, da bi se izbjegao gubitak ili minimizirao. Sa druge strane, *rizik modela* se vezuje za korišćenje neadekvatnog modela za mjerenje rizika. Zbog ovog rizika, za koji se smatra da uvijek postoji u određenom stepenu, treba voditi računa da pretpostavke modela koji će se koristiti budu ispunjene.

## 2.2. Karakteristike finansijskih vremenskih serija

Empirijske činjenice o finansijskim tržištima su vrlo dobro poznate još od pionirskih radova koje su uradili Mandelbro (Mandelbrot 1963.) i Fama (1965.).[4] Osnovne osobine finansijskih vremenskih serija, koje se mogu izdvojiti, su sledeće:[5]

1. Serije prinosa nijesu nezavisne i jednako raspodijeljene iako pokazuju nisku serijsku korelaciju;
2. Serije apsolutnih ili kvadriranih prinosa pokazuju izraženu serijsku korelaciju;

[4] Manganelli, S., Engle, R. F. (2001) Value at Risk Models in Finance. ECB Working Paper No. 75. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=356220. str. 8.
[5] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Op. cit., str. 117.

3. Uslovni očekivani prinosi su bliski nuli;
4. Volatilnost varira u vremenu - primijećeno je da volatilnost, tj. uslovna varijansa više raste kao odgovor na negativnu vijest (npr. visoki pad) u odnosu na pozitivnu vijest istih razmjera;
5. Serije prinosa imaju rasporede sa izraženom spljoštenošću, tj. imaju raspodjele sa većom koncentracijom vjerovatnoće na krajevima – teškim repovima rasporeda;
6. Ekstremni prinosi se javljaju u grupama - postoji tendencija da će visoke stope prinosa biti praćene visokim stopama prinosa, a niske stope će pratiti takođe niske stope prinosa, bile te stope pozitivne ili negativne.

Sve ove navedene specifičnosti dovode do toga da normalna raspodjela, koja je uobičajena u upotrebi, nije dovoljno dobra za modeliranje finansijskih vremenskih serija, uprkos Centralnoj graničnoj teoremi. To je Mandelbro i praktično pokazao i provjerio na prinosima akcija.[6]

### 2.2.1. Kratki osvrt na osnovne pojmove finansijskih vremenskih serija

Statistička teorija ima važnu ulogu u analizi finansijskih vremenskih serija, zbog neizvjesnosti koja se prevashodno odražava kroz volatilnost. U cilju razmatranja finansijske primjene različitih ekonometrijskih modela i statističkih metoda, neophodno se, najprije, upoznati sa osnovnim konceptima prinosa finansijskih sredstava i napraviti kratak uvod u procese koji će se u narednom dijelu disertacije koristiti. Stoga se u nastavku definišu osnovni pojmovi finansijskih vremenskih serija.

***Prost prinos za jedan period***

Ako cijenu nekog sredstva u vremenskom trenutku *t*, označimo sa $P_t$, tada je *prosti neto prinos,* $R_t$, posjedovanja sredstva za jedan vremenski period, od trenutka *t-1* do *t*:

[6] Mandelbrot, B. (1963) The Variation of Certain Speculative Prices. Journal of Business 36 str. 394-419.

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

Odgovarajući *prosti bruto prinos*, $1 + R_t$, je:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

***Prost prinos za više perioda***

Prosti neto prinos posjedovanja sredstva za *k* vremenskih perioda, $R_t[k]$, od trenutka *t-k* do *t* je:

$$R_t[k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1.$$

Odgovarajući prosti bruto prinos, koji se često u literaturi zove složeni prinos, $1 + R_t[k]$, je:

$$1 + R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \ldots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} =$$
$$= (1 + R_t)(1 + R_{t-1})\ldots(1 + R_{t-k+1}) = \prod_{j=0}^{k-1}(1 + R_{t-j}).$$

***Neprekidno složen prinos***

Prirodni logaritam prostog bruto prinosa predstavlja neprekidno složen prinos, $r_t$, ili, kraće, *logaritmovani prinos*:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1},$$

gdje je $p_t = \ln(P_t)$.

Neprekidno složeni prinos, $r_t[k]$, za više perioda predstavlja zbir neprekidno složenih prinosa za odgovarajuće jedinične periode:

$$r_t[k] = \ln(1 + R_t[k]) = \ln[(1 + R_t)(1 + R_{t-1})...(1 + R_{t-k+1})] =$$
$$= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + ... + \ln(1 + R_{t-k+1}) = r_t + r_{t-1} + ... + r_{t-k+1}.$$

***Zajednička raspodjela***

Zajednička raspodjela dvije promjenljive *X* i *Y*, sa parametrom $\theta$, $F_{X,Y}(x, y; \theta)$, definiše se kao

$$F_{X,Y}(x, y; \theta) = P(X \le x, Y \le y; \theta) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{x,y}(\omega, z; \theta) dz d\omega,$$

gdje je $f_{x,y}(x, y; \theta)$ zajednička funkcija gustine vjerovatnoće. Analogno se definiše za više od dvije promjenljive.

***Marginalna raspodjela***

Marginalna raspodjela promjenljive *X*, $F_X(x; \theta)$, data je sa

$$F_X(x; \theta) = F_{X,Y}(x, \infty, ..., \infty; \theta).$$

***Uslovna raspodjela***

Uslovna raspodjela promjenljive X, pod uslovom da je $Y \le y$, u oznaci $F_{X|Y \le y}(x; \theta)$, data je sa

$$F_{X|Y \le y}(x; \theta) = \frac{P(X \le x, Y \le y; \theta)}{P(Y \le y; \theta)} = \frac{f_{x,y}(x, y; \theta)}{f_y(y; \theta)}.$$

***Stacionarnost***

Osnovna osobina vremenskih serija je stacionarnost. Za vremensku seriju $\{x_t\}$ kažemo da je *strogo stacionarna* ako je zajednička raspodjela od $(x_{t_1},...,x_{t_k})$ jednaka, za svako *t*, sa $(x_{t_1+t},...,x_{t_k+t})$, gdje je *k* proizvoljan pozitivan cijeli broj, a $(t_1,...,t_k)$ je skup od *k* pozitivnih cijelih brojeva. Dakle, stroga stacionarnost podrazumijeva nepromjenljivost zajedničke raspodjele kroz vrijeme. S druge strane, vremenska serija $\{x_t\}$ je *slabo stacionarna* ako se njen prosjek i kovarijansa između $x_t$ i $x_{t-h}$ ne mijenjaju kroz vrijeme, gdje je *h* proizvoljan cijeli broj.

Uopšte u finansijskoj literaturi, obično se pretpostavlja da su serije prinosa sredstava slabo stacionarne, što se može emprirjski provjeriti, a na osnovu te osobine je moguće predviđati buduće opservacije.[7]

***Bijeli šum***

Vremenska serija predstavlja proces bijelog šuma ako je $\{x_t\}$ niz nezavisnih i jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa konačnim prosjekom i varijansom. Gausov bijeli šum predstavlja vremenska serija $x_t$ koja je normalno raspodijeljena sa očekivanom vrijednosti 0 i varijansom $\sigma^2$.

***AR model***

Prosti model koji pokazuje uticaj prinosa iz prethodnog perioda na tekući prinos,

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t,$$

gdje se pretpostavlja da je $\{a_t\}$ proces bijelog šuma sa očekivanom vrijednosti 0 i varijansom $\sigma_\varepsilon{}^2$, zove se *autoregresivni model reda 1 – AR(1) model*. Ovaj model ima istu formu kao model proste linearne regresije gdje je $r_t$ zavisna promjenljiva a $r_{t-1}$

[7] Tsay, R. S. (2010) Analysis of Financial Time Series, Third Edition. John Wiley & Sons, Inc., str. 30.

nezavisna, objašnjavajuća promjenljiva. Koristi se za modeliranje stohastičke volatilnosti, kada je zavisna promjenljiva, umjesto $r_t$, logaritmovana uslovna varijansa.

***MA model***

*Prost model pokretnih prosjeka – MA model* se može definisati kao AR model beskonačnog reda:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + ... + a_t .$$

Ovako definisan model ima beskonačno mnogo parametara. Da bi se model prilagodio praktičnoj upotrebi, može se pretpostaviti da koeficijenti $\phi_i$ zadovoljavaju neke uslove kako bi se izrazili preko konačnog broja parametara. Ova ideja se može predstaviti na sledeći način:

$$r_t = \phi_0 - \theta_1 r_{t-1} - \theta_1^2 r_{t-2} - \theta_1^3 r_{t-3} - ... + a_t ,$$

gdje koeficijenti $\phi_i$ zavise od jednog parametra $\theta_1$, odnosno, važi da je $\phi_i = -\theta_1^i$, za $i \geq 1$. Da bi model bio stacionaran, apsolutna vrijednost parametra $\theta_1$ mora da bude manja od 1. MA model može da se piše i u sledećoj formi:

$$r_t + \theta_1 r_{t-1} + \theta_1^2 r_{t-2} + \theta_1^3 r_{t-3} + ... = \phi_0 + a_t ,$$

ili

$$r_t = \phi_0 (1 - \theta_1) + a_t - \theta_1 a_{t-1} .$$

Opšti oblik modela MA(1) je

$$r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} .$$

***ARMA model***

ARMA model kombinuje prethodna dva modela i najčešće se koristi za modeliranje volatilnosti, kao što će kasnije u radu biti prikazano. Vremenska serija $\{r_t\}$ prati ARMA(1,1) model ako važi

$$r_t - \phi_1 r_{t-1} = \phi_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1},$$

gdje je $a_t$ proces bijelog šuma.

Opšti ARMA(*r,m*) model za jednu seriju je

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{r} \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^{m} \theta_i a_{t-i},$$

gdje je $\{a_t\}$ proces bijelog šuma, a $r$ i $m$ su nenegativni cijeli brojevi. Ovaj model se kasnije u radu detaljnije razmatra.

### 2.2.2. Volatilnost finansijskih vremenskih serija

Volatilnost se definiše kao uslovna standardna devijacija finansijskih prinosa dobijenih istorijskim podacima po jedinici vremena. Prinosi za koje se računa volatilnost su najčešće neprekidno složeni, odnosno logaritmovani (definicija je navedena u kratkom osvrtu na osnovne pojmove finansijskih vremenskih serija). Modeliranje volatilnosti vremenskih serija može da poboljša efikasnost u ocjeni parametara i prognozi, a takvi modeli se zovu modeli uslovne heteroskedastičnosti.

Prvi model koji daje sistemski okvir za modeliranje volatilnosti je ARCH model – autoregresivni uslovni heteroskedastični model. Njegovu osnovnu ideju je izveo 1982. godine Engle.[8] ARCH($m$) model, dat je u obliku

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m a_{t-m}^2,$$

gdje je $\{\varepsilon_t\}$ niz nezavisnih i jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa očekivanom vrijednosti 0 i varijansom 1, $\alpha_0 > 0$, i $\alpha_i \geq 0, \quad \forall i > 0$. Koeficijenti $\alpha_i$ moraju ispunjavati ove uslove kako bi varijansa člana $a_t$ u modelu bila konačna.

Iako je primjena ARCH modela jednostavna, često je potreban veliki broj parametara za adekvatnu ocjenu procesa volatilnosti finansijskih prinosa. Stoga se kao značajno rješenje ovog praktičnog problema navodi naučni doprinos Bollersleva (1986)[9] koji je uopštio ARCH model. To uopštenje je poznatije kao model uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti, ili skraćeno, GARCH model. GARCH model će biti detaljno objašnjen u narednom dijelu disertacije.

Mjere rizika koje će se računati na osnovu ovog i drugih modela, slijede u nastavku disertacije.

### 2.3. Mjere rizika

Svrhe upotrebe mjera rizika su brojne. Osnovna funkcija upravljanja rizikom u finansijama je određivanje odgovarajuće margine, tj. minimalnog iznosa kapitala koji bi finansijska institucija trebalo da drži zbog neočekivanih budućih gubitaka, a koja je

[8] Engle, R. F. (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom inflation. Econometrica 50, 987-1007.
[9] Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Journal of Econometrics 31, 307-327.

propisana od strane regulatornog tijela. Na taj način, mjere rizika su takođe sredstvo koje menadžment koristi za limitiranje nivoa rizika pojedinih djelova kompanije.

Postoji nekoliko pristupa u mjerenju rizika finansijske pozicije, ali u ovom radu se daje prednost mjerama rizika zasnovanim na raspodjeli gubitka, koje su najmodernije i predstavljaju statističke mjere koje opisuju uslovne ili bezuslovne raspodjele gubitka za neki predviđeni vremenski okvir. One su u praksi najviše u upotrebi što je i prirodno, jer se upravljanje rizikom u osnovi bavi gubicima, pa je stoga mjerenje zasnovano na raspodjeli gubitka. Takođe, raspodjela gubitka, ako se ispravno ocijeni, dobro oslikava efekte grupisanja i diverzifikacije, a prednost je i što se raspodjele gubitka različitih portfolija mogu međusobno porediti[10].

Nedostaci koji se ispoljavaju prilikom rada sa raspodjelom gubitka su što se svaka procjena te raspodjele bazira na podacima iz prošlosti i što je teško precizno ocijeniti tu raspodjelu. Zbog toga, treba raditi na poboljšanju metoda ocjene, kao i praćenju mjera rizika koje se zasnivaju na raspodjeli gubitka dodatnim informacijama – mjerama koje se baziraju na određenim scenarijima.

Osnovne mjere rizika koje se koriste u finansijama su parametar vrijednosti pri riziku (VaR), varijansa, očekivani gubitak (ili deficit) i nivo prinosa.

**Value at Risk (VaR)** koncept je osmišljen kao standard za mjerenje tržišnog rizika, za zahtjeve kapitala i internu kontrolu rizika, u poslednjih nekoliko godina. U 1996. godini, Bazelski sporazum, koji je odredio uslov kapitala tržišnog rizika za banke, preporučio je bankama da koriste ovaj pristup u mjerenju uslova kapitala i određivanju tržišnog rizika. VaR se definiše kao maksimalni gubitak finansijske pozicije koji se može očekivati sa određenim nivoom pouzdanosti u određenom vremenskom periodu. Dakle, radi se o mjeri gubitka pridruženog rijetkom događaju pod normalnim tržišnim uslovima.[11]

[10] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Op. cit. str. 36.
[11] Tsay, R. S. (2010) Op. cit., str. 326.

Takođe, sa aspekta regulatornog tijela, ova mjera predstavlja minimalan gubitak u vanrednim tržišnim uslovima.

Posmatrajmo portfolio neke rizične aktive i odredimo sa $V_t$ vrijednost portfolija u vremenskom trenutku *t*. Pretpostavimo da želimo da odredimo nivo rizika u periodu [*t,t+l*]. Označićemo slučajnu promjenljivu gubitka portfolija sa $L_{t+l} = -(V_{t+l} - V_t) = \Delta V(l)$. Kumulativnu funkciju raspodjele gubitka ćemo označiti sa $F_L$ gdje je $F_L(x) = P(L \leq x)$. Tada je parametar vrijednosti pri riziku, VaR, pri nivou značajnosti α ($\alpha \in (0,1)$)[12] u stvari α-kvantil funkcije raspodjele $F_L$ i predstavlja najmanji realni broj koji zadovoljava nejednakost $F_L(x) \geq \alpha$, odnosno:

$$VaR_\alpha = \inf(x | F_L(x) \geq \alpha). \tag{2.1}$$

Osnovni problem u ekonometrijskom modeliranju VaR-a se odnosi na određivanje kumulativne funkcije raspodjele. Različiti metodi ocjene ove funkcije dovode do razlike u računanju VaR-a.

Postoje brojne kritike koje se upućuju na račun mjere koncepta VaR-a. Prije svega, ističe se da VaR nije koherentna mjera rizika, jer narušava osobinu subaditivnosti koju bi trebalo da ima mjera rizika.[13] To znači da ako posmatramo dva portfolija koja imaju dvije funkcije raspodjele gubitaka, možemo pojedinačno izračunati VaR za oba portfolija. Međutim, ako ih objedinimo, i posmatramo kao jedinstven portfolio, i dobijemo novu funkciju raspodjele gubitka sabiranjem početne dvije, nećemo po definiciji imati da je VaR jedinstvenog portfolija ograničen odozgo zbirom VaR-a pojedinačnih portfolija. To je u suprotnosti sa činjenicom da spajanjem portfolija dolazi do benefita diverzifikacije.

**Varijansa** raspodjele gubitka je istorijski bila dominantna mjera rizika u finansijama. Razlog tome je bio veliki uticaj teorije portfolija Markovica (Markowitz) koji je koristio

[12] Najčešće α=0.01 ili α=0.05, tj. 1% i 5%.
[13] Artzner, P., Delbean, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1997) Thinking Coherently. RISK 10(11): 68-71.

varijansu za mjeru rizika.[14] Tehnički, ako se radi sa varijansom, treba pretpostaviti da drugi momenat raspodjele gubitka postoji. Za mnoge raspodjele prinosa u finansijama ovo nije problem, ali to može stvarati problem u određenim oblastima neživotnog osiguranja ili u analizama operativnih gubitaka. Takođe, nedostatak varijanse kao mjere rizika, proizilazi iz osobine varijanse da ne pravi razliku između pozitivnih i negativnih odstupanja od prosjeka. Kao takva, varijansa predstavlja dobru mjeru rizika samo za (približno) simetrične oko prosjeka, kao što su standardna normalna raspodjela i Studentova t-raspodjela sa konačnom varijansom. Empirijske raspodjele finansijskih gubitaka najčešće imaju teže repove nego ove dvije raspodjele, pa varijansa kao mjera rizika u tim slučajevima nije adekvatna.

**Očekivani deficit ili gubitak - Expected shortfall (ES)** mjera je blisko vezana za VaR, i praktično se često navodi kao mjera koja prevazilazi konceptualne nedostatke VaR-a. Ova mjera poznata je i pod nazivom uslovni VaR.

Za gubitak $L$ čija je očekivana vrijednost njegovog apsolutnog iznosa konačna - $E(|L|) < \infty$, očekivani deficit pri nivou značajnosti α se definiše kao

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(F_L)du, \tag{2.2}$$

gdje je $q_u(F_L)$ funkcija kvantila funkcije raspodjele $F_L$. Dakle, veza ove mjere sa VaR je

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du. \tag{2.3}$$

Umjesto fiksiranja određenog nivoa značajnosti, traži se prosječna vrijednost VaR-a preko svih nivoa $u \geq \alpha$, i „dalje traži u repu“ raspodjele gubitka. Očigledno je da mjera

[14]McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Op. cit. str. 43.

ES zavisi samo od raspodjele gubitka, i važi da je $ES_\alpha \geq VaR_\alpha$. Dakle, ova mjera predstavlja očekivanu vrijednost gubitka pod uslovom da je neka granična vrijednost (obično VaR) prekoračena.[15]

Još jedna mjera rizika biće definisana u narednom poglavlju, jer je usko vezana za koncept teorije ekstremnih vrijednosti, a to je nivo prinosa.

Upotreba navedenih mjera rizika propisana je regulativom, koja obuhvata pravila kojih se treba pridržavati kako bi se upravljanje rizicima poboljšalo, i omogućilo finansijskim institucijama da bolje savladavaju ekonomske šokove.

## 2.4. Kontrola rizika

Nesumnjivo je da regulativa rizika postoji odavno, iako se ti prvi oblici kontrole odnose na neka pravila koja nijesu bila od početka zvanično na snazi. Ključni oblici sadašnjeg okvira regulative upravljanja rizikom nastali su u drugoj polovini dvadesetog vijeka. Od tada se kontroli rizika posvećuje posebna pažnja, i pravila kontrole se konstantno revidiraju i prilagođavaju praksi.

Najveći dio kontrole se može izvesti iz Bazelskog komiteta koji je osnovan od strane guvernera Centralnih banaka grupe G-10 krajem 1974. godine. G-10 grupa je uglavnom formirana od 11 industrijskih zemalja koje su se konsultovale o ekonomskim, monetarnim i finansijskim pitanjima. Bazelski komitet nema formalni autoritet, pa tako ni njegovi standardi nemaju pravnu snagu. Ovi standardi u stvari predstavljaju izraz dobre prakse, potvrđene od strane supervizorskih kuća iz raznih zemalja svijeta, koje su se složile da će implementirati ove standarde u njihovim zemljama, bilo kroz mijenjanje legislative, bilo kroz implementaciju u regulatornoj praksi. U Evropi na primjer, standardi su implementirani kroz Direktive o adekvatnosti visine kapitala.

[15] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Op. cit. str. 44.

### 2.4.1. Bazelski standardi

**Prvi Bazelski sporazum (Bazel I)**[16] u julu 1988. godine, posvećen bankarskoj superviziji, promovisao je set preporuka sa ciljem utvrđivanja međunarodnog minimalnog nivoa kapitala. Glavni akcenat ovog sporazuma bio je na kreditnom riziku, koji je tada jasno predstavljao najvažniji izvor rizika u bankarstvu. Preporuke su djelimično bile motivisane i željom da se utvrde standardi koji će banke, na globalnom planu, staviti u ravnopravniji položaj po pitanju visine kapitala. Na primjer, u to vrijeme japanske banke su držale znatno manje kapitala, za razliku od ostalih banaka. To je imalo za posljedicu da cijene kredita japanskih banaka budu znatno niže nego kod ostalih banaka.

Bazelski komitet preporučuje da kapital mora iznositi najmanje 8% u odnosu na visinu izloženosti portfolija banke, mjerenu ponderima rizika. Plasmani sa različitim rizicima množe se sa pripadajućim ponderom za dati stepen rizika. Na primjer, za obveznicu emitovanu od strane države, ponder rizika iznosi 0%, dok za obveznicu emitovanu od strane preduzeća, ponder iznosi 100%, nezavisno od procijenjene rizičnosti samog preduzeća-zajmotražioca. Ovaj pristup je imao za rezultat, da obezbijeđeni zajam plasiran preduzeću rejtinga AAA klase, bude mjeren istim koeficijentom rizika, kao i neobezbijeđeni zajam plasiran preduzeću rejtinga BBB klase. Ova neosjetljivost na rizik standarda Bazela I rezultirala je od strane banaka seljenjem zajmovnih plasmana ka rizičnijim grupama, kako bi ostvarile veće premije za rizik, sa istim iznosom kapitala. To je bilo logično i očekivati, jer banke posmatraju pravila sa stanovišta maksimizacije prihoda na kapital. No i pored ovog propusta u kvantifikovanju rizika, može se reći da je u to vrijeme Bazel I bio dobar kompromis, jer je tada bio neophodan regulatorni pristup koji je zaustavio dalju tendenciju smanjivanja kapitala banaka.

[16] Basel Committee on Banking Supervision (1988) Amendment to the Capital Accord. Basel, Switzerland. Available at http://www.bis.org/publ/bcbs12b.pdf.

Od tada, proces alokacije kapitala prema pojedinačnim kreditima postaje više sofisticiran, posebno budući da veliki broj banaka koristi pristup interne ocjene. Zajmovi za kreditiranje poslovnih aktivnosti, rangiraju se na skali od 1 do 10, gdje pozicija 1 odgovara rejtingu AAA, dok pozicija 10 odgovara otpisivanju potraživanja po osnovu zajma.

Neke banke idu dalje pa koriste podatke o raspodjeli gubitaka iz prošlosti. Na temelju toga procjenjuje se varijansa i prosjek oko koga se gubici kreću za svaku rejting klasu. Na taj način može biti ustanovljena vjerovatnoća raspodjele gubitaka.

Važnom dopunom Bazela I 1996. godine propisan je takozvani standardizovani model za tržišni rizik, kao što je istovremeno sugerisano bankama da mogu koristiti interni model baziran na konceptu VaR-a.

**Drugi Bazelski sporazum (Bazel II)**[17] je zaključen 2001. godine. Opet glavnu temu predstavlja kreditni rizik jer je cilj da banke mogu da koriste tehnike koje su osjetljivije prema riziku u procjeni rizika kreditnih portfolija. Drugim riječima, dat je podstrek korišćenju sofisticiranih tehnika upravljanja kreditnim rizikom koje omogućavaju održavanje nivoa kapitala na nižem nivou. Druga bitna tema Bazela II je razmatranje operativnog rizika kao nove klase rizika.

Guverneri Centralnih banaka grupe G-10 i rukovodioci nadzora su 26. juna 2004. godine usvojili publikaciju revidiranog okvira kapitala[18]. Ključna novina u okviru Bazela II je uvođenje *koncepta tri stuba*. Time se nastoji da se postigne sveobuhvatniji pristup upravljanju rizikom koji se fokusira na odnos između različitih kategorija rizika. Istovremeno, ovaj koncept jasno pokazuje postojeću razliku između mjerljivog i nemjerljivog rizika.[19]

---

17 Basel Committee on Banking Supervision (2001) The New Basel Capital Accord, Consultative Document. Basel, Switzerland. Available at http://www.bis.org/publ/bcbsca03.pdf.
[18] Basel Committee on Banking Supervision (2004) International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework. Basel, Switzerland. http://www.bis.org/publ/bcbs107.pdf.
[19] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Op. cit. str. 10.

*Prvi stub* sadrži zahtjeve da banke računaju minimalni nivo kapitala – regulatornog kapitala – sa ciljem da se mjerenje tog minimalnog iznosa uskladi sa mogućim gubitkom banaka. Iako je tretman tržišnog rizika relativno nepromijenjen u odnosu na dopunu Bazela I iz 1996. godine, kod kreditnog i operativnog rizika banke mogu da izaberu između tri različita pristupa prilikom utvrđivanja minimuma kapitala.

Svaki kvantitativni pristup upravljanju rizikom treba da se uključi u strukturu korporativnog upravljanja čime se obezbjeđuje dobro funkcionisanje kompletnog menadžmenta. Konkretno, upravni odbor snosi odgovornost za kontrolu rizika. Kroz *drugi stub* Bazela II, koji se odnosi na proces nadzorne revizije, lokalni regulatori vrše kontrolu. Ovaj stub prepoznaje neophodnost efikasnog pregleda internih procjena banaka u kompletnom sistemu upravljanja rizicima, i obezbjeđuje da menadžment pravilno rasuđuje i izdvaja odgovarajući nivo kapitala za različite rizike.

Na kraju, traže se jasna uputstva za izvještavanje o rizicima koja donose finansijske institucije, da bi se postiglo smanjenje sistemskog rizika povećanom kontrolom. *Treći stub* nastoji da uspostavi tržišnu disciplinu kroz bolju javnu objavu mjera rizika i drugih relevantnih informacija za upravljanje rizikom.

Uvođenje operativnog rizika kao nove klase dovelo je do velikog broja diskusija među različitim stejkholderima. Iako postoji slaganje da ljudski rizik, rizik procesa i rizik tehnologije, kao tipovi operativnog rizika, jesu važni u finansijskom sektoru i u sektoru osiguranja, postoje velika neslaganja u pogledu njihove mjerljivosti.

**Treći Bazelski sporazum (Bazel III)**[20] najprije zaključen u decembru 2010. godine, a revidiran u januaru 2011. za kapital, a u januaru 2013. godine za likvidnost, donosi razumljiv set mjera koje će omogućiti bankama da bolje savladaju finansijske i ekonomske šokove i poboljšati trasparentnost banaka, kao i samo upravljanje rizikom.

[20] International Regulatory Framework for Banks, (Basel III), http://www.bis.org/bcbs/basel3.htm.

Reforme imaju dvostruki cilj: 1. Mikroprudencijalni – kontrola na nivou banaka, kako bi se povećala otpornost pojedinih bankarskih institucija na periode stresa, i 2. Makroprudencijalni – upravljanje velikim sistemskim rizicima, koji mogu da se šire cijelim bankarskim sektorom, kao i njihovo prociklično pojačavanje kroz vrijeme.

Ukratko, nivo kapitala se povećava sa 8% na 10,5%, jer se stope koje se odnose na djelove povećavaju za određeni iznos: na komponentu 1 – zajednički kapital, stopa se povećava sa 2% od visine izloženosti portfolija banke, mjerene ponderima rizika prije određenih regulatornih odbitaka, na 4,5% nakon tih odbitaka. Uvodi se stopa očuvanja kapitala od 2,5%, kao i stopa kontracikličnog kapitala (0-2,5%).

U pogledu leveridža[21], Bazel III uvodi minimilan leveridž racio od 3%, i dva racija likvidnosti: 1. Racio pokrivenosti likvidnosti, koji zahtijeva od banke da drži visokokvalitetna likvidna sredstva za pokrivanje ukupnih neto odliva preko 30 dana, i 2. Racio neto stabilnog finansiranja, koji zahtijeva odgovarajući iznos stabilnih sredstava za prekoračenje potrebnog iznosa stabilnih sredstava, i to za godinu dana produženog stresa.

### 2.4.2. Akademski osvrt na Bazel III

Iako vlada generalno mišljenje da je poboljšanje globalne bankarske kontrole neophodno da bi se smanjio sistemski rizik, Bazel III kao najskoriji pokušaj takve prakse, trpi značajne kritike. Ovaj treći sporazum Bazelskog komiteta nastao je kao napor da se smanji sistemski rizik razvijanjem i reformisanjem pravila na nivou globalnih standarda u bankarstvu. U skorašnjoj studiji[22] koja analizira regulativu ovog sporazuma, (povećane zahtjeve za bankarskim kapitalom na obim kredita i stope), zaključuje se da veći racio

[21] U kontekstu Bazela III, racio leveridža se definiše kao odnos između mjere kapitala (definicije kapitala) i mjere izloženosti banke (ukupne izloženosti) a računa se kao prosjek mjesečnog koeficijenta leveridža tokom kvartala.

[22] Cosimano, T. F., Hakura, D. S. (2011) Bank Behavior in Response to Basel III: A Cross-Country Analysis. International Monetary Fond. Working Paper. Available at: http://www.imf.org/external/pubs/ft/wp/2011/wp11119.pdf.

kapitala i duga dovodi do povećanja troškova kreditiranja, čak iako puni efekti ove uredbe tek treba da budu detaljnije analizirani.

Regulativom se od banaka zahtijeva da povećaju nivo kapitala kako bi se zaštitio finansijski sistem za vrijeme krize. Još je i Bazel II u akademskim krugovima izazvao žestoke kritike sa argumentima da je doveo do produbljivanja efekata finansijske krize iz 2007-2008. godine. Bazel III je nastao kao odgovor na finansijsku krizu, kojim se revidiraju postojeći standardi.

Dodatni zahtjevi kapitala u kombinaciji sa poboljšanim standardima upravljanja rizikom, teorijski bi trebalo da dovedu do smanjenog rizika propasti banaka, i da smanje međuzavisnost finansijskih institucija, efikasno smanjujući rizik budućih bankarskih kriza. Međutim, postoje mogući negativni efekti, kao što su:

- Manje, slabije banke bivaju istisnute sa tržišta od strane većih banaka koje mogu lakše da povećaju zahtjeve kapitala;
- Povećan pritisak na margine profita banaka i na operativne kapacitete;
- Smanjenje kreditne sposobnosti.

Kritičari ističu da će ovi neželjeni efekti dovesti do smanjenja raspoloživosti kredita ili do povećanja njihovih ukupnih troškova, u zdravoj svjetskoj ekonomiji, iako je očigledno da je sada ona daleko od toga. OECD[23] procjenjuje da će implementacija Bazela III smanjiti godišnju stopu rasta Bruto Domaćeg Proizvoda za 0,05-0,15% u periodu od 5 godina.[24]

### 2.4.3. Implementacija Bazelskih standarda u Crnoj Gori

Nadzor banaka je u Crnoj Gori povjeren Centralnoj banci Crne Gore. Regulisanje banaka

[23] OECD – The Organisation for Economic Cooperation and Development – Organizacija za ekonomsku saradnju i razvoj

[24] Slovik, P., Cournède, B. (2011) Macroeconomic Impact of Basel III, OECD Economics Department Working Papers, No. 844. OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/5kghwnhkkjs-en.

pravno je formulisano kroz Zakon o bankama i propise Centralne banke. Ingerencije Centralne banke Crne Gore su sljedeće:

- Izdaje i oduzima dozvole za rad bankama;
- Donosi prudencijalne propise i standarde (propisuje kategorizaciju aktive, rezerve za kreditne gubitke, visinu izloženosti prema djelatnostima);
- Zahtijeva izvještaj o reviziji poslovanja od banaka. Banka je dužna da imenuje spoljnog revizora, uz odobrenje Centralne banke. Nezavisna spoljna revizija finansijskih izvještaja banke obavlja se u skladu sa međunarodnim standardima revizije, revizorskom etikom i propisima Centralne banke.

Iz navedenog zaključujemo da Centralna banka Crne Gore raspolaže ovlašćenjima neophodnim za efikasan prudencijalni nadzor. Od propisa Centralne banke, za kontrolu rizika su posebno bitne: Odluka o adekvatnosti kapitala banaka, Odluka o minimalnim standardima za upravljanje kreditnim rizikom u bankama, Odluka o minimalnim standardima za upravljanje rizikom likvidnosti u bankama, Odluka o minimalnim standardima za upravljanje tržišnim rizikom u bankama, Odluka o minimalnim standardima za upravljanje operativnim rizikom u bankama itd.

Odluka o adekvatnosti kapitala predstavlja jedan od ključnih regulatornih akata kojima se uređuje poslovanje banaka. Odluka je u svemu usaglašena sa međunarodno priznatim standardima bankarskog poslovanja i propisuje elemente i način izračunavanja sopstvenih sredstava banke, metodologiju za izračunavanje potrebnog kapitala banke, za kreditni rizik, rizik izmirenja, rizik druge ugovorne strane, tržišne rizike i operativni rizik kao i način izračunavanja koeficijenta solventnosti. Bitno je istaći da ovom odlukom bankarska regulativa u Crnoj Gori u cjelosti implementira standarde Bazelskih principa koji predstavljaju regulatornu osnovu evropskih direktiva kojima se uređuje bankarsko poslovanje. Na taj način ona predstavlja izuzetno značajan iskorak u pravcu pune harmonizacije zakonodavnog okvira iz ove oblasti sa evropskim zakonodavnim okvirom.

Nakon identifikovanja svih rizika i kvantifikovanja izloženosti prema rizicima, banka treba da procijeni način pokrića identifikovanih rizika. Banka treba da je u mogućnosti da formuliše i utvrdi postojeći i budući iznos internog kapitala neophodnog za pokriće kvantifikovanog nivoa rizika, uključujući i rezultate stresnog testiranja. Postoje tri varijante za izračunavanje minimalnog potrebnog kapitala:

- korišćenje metoda koji su izvedeni iz propisa Centralne banke (npr. Odluka o adekvatnosti kapitala – metodologija za izračunavanje minimalnog potrebnog kapitala za pojedine rizike);
- korišćenje sopstvene metodologije;
- korišćenje kombinacije dvije prethodne metodologije.

U slučaju korišćenja sopstvene metodologije, banka mora obezbijediti validnu argumentaciju za adekvatnost kapitala. Supervizor će dati ocjenu adekvatnosti pristupa koji banka koristi u okviru sopstvene metodologije, u skladu sa principima opreznosti i konzervativnosti.

Shodno tome, banke se podstiču da koriste odgovarajuće procedure i sisteme u cilju obezbjeđenja adekvatnosti kapitala kako bi se pokrili svi materijalni rizici. Banke se suočavaju sa izazovom razvoja internih procedura i sistema kako bi obezbijedile adekvatne resurse kapitala u dugom roku. Na taj način, banke treba da budu u mogućnosti da pokažu da su obuhvatile sve rizike i implementirale metode i sisteme koji su neophodni za obezbjeđivanje adekvatnosti kapitala. Sa druge strane, nadležni organi supervizije treba da procijene te procedure i da preduzmu, ako je to neophodno, supervizorske mjere. Dijalog između banke i supervizora predstavlja ključni dio procesa supervizorskog pregleda.

Bankarski sektor je stekao „bolno“ ali dragocjeno iskustvo iz pretkriznog kreditnog buma i iz perioda saniranja njegovih posljedica. Međutim, taj period još uvijek nije okončan. Iako ne postoje direktni rizici koji ugrožavaju finansijsku stabilnost, a ukupan nivo rizika je ocijenjen kao umjeren, pravilna politika izdvajanja rezervacija ostaje nezaobilazna kod

upravljanja kreditnim rizikom. Takođe, za slučaj da bude neophodno, moraju se unaprijed razraditi sve mogućnosti za zaduživanja i za dokapitalizacije. Sve to treba da budno prati Centralna banka, koja bi u okviru svojih mogućnosti trebalo da nastavi da podržava bankarski sektor. Iako je koncept finansijske stabilnosti i makroprudencione kontrole drugačiji u odnosu na mikroprudencioni pristup, efikasna supervizija banaka je ključ za ostvarivanje stabilnosti finansijskog sistema, jer je preventiva najefikasnija politika.

Pored efikasne supervizije banaka, neophodno je da bankarski sektor posjeduje znanje o savremenim metodologijama koje se koriste u mjerenju rizika. Metodologije za mjerenje parametra vrijednosti pri riziku se izlažu u nastavku disertacije.

## 2.5. Metodologije VaR-a

Iako je koncept parametra vrijednosti pri riziku jednostavan i interpretativno jasan, mjerenje VaR-a je statistički izazovan problem, za koji postoji veliki broj metoda obračuna. Danas postoji veliki broj metoda i tehnika obračuna VaR-a koje su međusobno manje ili više slične. U radu je prihvaćena podjela na tri osnovne vrste metoda VaR-a, koju su definisali Manganelli i Engle 2001. godine:[25]

1. Parametarski modeli (RiskMetrics i GARCH);
2. Neparametarski modeli kao što su istorijska simulacija i hibridni model, i
3. Semiparametarski modeli – teorija ekstremnih vrijednosti, CAViaR i GARCH model kvazi-maksimalne vjerodostojnosti.

Vrsta ocjene parametra vrijednosti prema riziku može biti trojaka: 1. kvantilna ocjena, 2. ekonometrijska ocjena i 3. ocjena dobijena pomoću teorije ekstremnih vrijednosti. Prve dvije grupe modela su ovdje detaljno opisane, a od semiparametarskih modela se posebna

[25] Manganelli, S., Engle, R. F. (2001) Op. cit. str. 7.

pažnja, u trećem poglavlju, poklanja teoriji ekstremnih vrijednosti, kao novom pristupu modeliranja rizika ekstremnih događaja koji, pokazalo se, daje izuzetno dobre rezultate.

### 2.5.1. Parametarski modeli

Parametarski pristup u mjerenju VaR-a, za razliku od neparametarskog, pravi eksplicitne pretpostavke o raspodjeli posmatranih prinosa finansijskih sredstava, i pokušava da, u skladu sa tim, modelira finansijske vremenske serije. Parametar VaR-a se ocjenjuje korišćenjem karakteristika prilagođene raspodjele. Naravno, neophodno je da izabrana raspodjela uzima u obzir karakteristike finansijskih podataka. Kao što je već rečeno u prvom poglavlju, normalna raspodjela ne odgovara ovim karakteristikama, ali zbog jednostavnosti, još uvijek može da služi svrsi.

#### 2.5.1.1. GARCH model

Model uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti (GARCH), koji su uveli Bollersev (1986) i Taylor (1986), predstavlja uopštenje autoregresivnog modela uslovne heteroskedastičnosti – ARCH, koji je razvio Engle 1982. godine. ARCH model se razvio iz potrebe da se modelira grupisanje volatilnosti, koje nije moglo da se ostvari pomoću normalne i Studentove t-raspodjele. Mandelbrot (1963) je prvi primjetio volatilnost, koja se često javljala kod finansijskih podataka. Moguće objašnjenje grupisanja volatilnosti je da se sama informacija koja najčešće pokreće volatilnost na tržištima, javlja u koncentrisanom vremenskom periodu, umjesto da je ravnomjerno raspoređena tokom vremena.

Logaritmovani prinos, najčešće procentualno izražen, je označen sa $r_t$. Neka je $a_t = r_t - \mu_t$ novost (inovacija) u trenutku *t*. Model se, tada, može predstaviti na sledeći način:[26]

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j}$$
$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{2.4}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{u} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{\upsilon} \beta_j \sigma_{t-j}^2 . \tag{2.5}$$

Sa $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_p, \theta_1, ..., \theta_q$ označeni su parametri jednačine (2.4), koja predstavlja autoregresioni model pokretnih sredina reda p i q, ARMA(*p*,*q*). Slučajan član modela, $a_t$, funkcija je od $\varepsilon_t$ - niza nezavisnih i jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih nulte očekivane vrijednosti i jedinične varijanse, koje imaju standardnu normalnu ili t-raspodjelu. Drugom jednačinom u modelu, (2.5) se modelira uslovna varijansa prinosa $r_t$, $\sigma_t^2 = E((r_t - E(r_t))^2 | \Omega_{t-1})$, gdje je $\Omega_{t-1}$ raspoloživi skup informacija zaključno sa trenutkom *t*-1. Drugim riječima, uslovna varijansa i jeste očekivana vrijednost kvadrata odstupanja od prosjeka pod pretpostavkom da raspolažemo datim skupom informacija. Volatilnost, uobičajeno, predstavlja ovako definisanu uslovnu varijansu.

Parametri $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_u, \beta_1, ..., \beta_\upsilon$ jednačine uslovne varijanse zadovoljavaju uslove $\alpha_0 > 0,\ \alpha_1, ..., \alpha_u \geq 0,\ \beta_1, ..., \beta_\upsilon \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\max(u,\upsilon)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. U praksi su parametri GARCH modela nepoznati i ocjenjuju se nekim od odgovarajućih ekonometrijskih metoda.

[26] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 333.

Jednačinom (2.5) se predstavlja uslovna varijansa prinosa $r_t$ kao funkcija kvadrata slučajnih šokova u trenucima $t-1, t-2, ..., t-u$ i uslovnog varijabiliteta u trenucima $t-1, t-2, ..., t-\upsilon$. Uobičajena oznaka modela je GARCH($u$,$\upsilon$).

Ako se pretpostavi da, na osnovu $h$ poznatih podataka procentualnih prinosa $r_t$ treba prognozirati njegove buduće vrijednosti kao i uslovnu varijansu za $l$ vrijednosti unaprijed, prognozirani nivo $r_{h+l}$ u trenutku $h+l$ je $\hat{r}_h(l)$, a ocijenjeni nivo varijabiliteta je $\hat{\sigma}_h^2(l)$. Pod pretpostavkom da su parametri modela poznati, prognoze za jedan period unaprijed ($l$=1) se računaju na sledeći način:

$$\hat{r}_h(1) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{h+1-i} + a_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{h+1-j} \tag{2.6}$$

$$\hat{\sigma}_h^2(1) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{u} \alpha_i a_{h+1-i}^2 + \sum_{j=1}^{\upsilon} \beta_j \sigma_{h+1-j}^2 \tag{2.7}$$

Ako je niz $\varepsilon_t$ slučajna promjenljiva koja ima standardizovanu normalnu raspodjelu, tj. $\varepsilon_t : N(0,1)$, tada i uslovna raspodjela slučajne promjenljive $r_{h+1}$ za raspoložive podatke zaključno sa trenutkom $h$ takođe ima normalnu raspodjelu sa aritmetičkom sredinom $\hat{r}_h(1)$ i varijansom $\hat{\sigma}_h^2(1)$. Tada se 5%-kvantil uslovne raspodjele, koji predstavlja ocjenu parametra vrijednosti pri riziku za vjerovatnoću 95% i horizont predviđanja 1, računa kao:

$$\hat{r}_h(1) + 1{,}65\hat{\sigma}_h(1). \tag{2.8}$$

Ako slučajna promjenljiva $\varepsilon_t$ ima Studentovu t-raspodjelu, sa υ stepeni slobode, tada se odgovarajući 5%-kvantil uslovne raspodjele dobija na sledeći način:

$$\hat{r}_h(1) + t_\upsilon \hat{\sigma}_h(1), \tag{2.9}$$

gdje je $t_\upsilon$ odgovarajuća kritična vrijednost iz t-raspodjele sa υ stepeni slobode. Poznato je da je varijansa slučajne promjenljive koja ima t-raspodjelu sa υ stepeni slobode $\frac{\upsilon}{\upsilon-2}$, pa je odgovarajuća kritična vrijednost $\frac{t_\upsilon}{\sqrt{\frac{\upsilon}{\upsilon-2}}}$.

GARCH(1,1) model ima sledeći oblik:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j} \tag{2.10}$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t : N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \tag{2.11}$$

Stvarna vrijednost uslovnog varijabiliteta u prvom nepoznatom trenutku $h$+1 je:

$$\begin{aligned} \sigma_{h+1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_h^2 \varepsilon_h^2) + \beta_1 \sigma_h^2 + \alpha_1 \sigma_h^2 - \alpha_1 \sigma_h^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2 + \alpha_1 (\varepsilon_h^2 - 1)\sigma_h^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Analogno, uslovni varijabilitet u sledećem trenutku *h+2* je

$$\begin{aligned} \sigma_{h+2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{h+1}^2 + \beta_1 \sigma_{h+1}^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{h+1}^2 + \alpha_1 (\varepsilon_{h+1}^2 - 1)\sigma_{h+1}^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ocjena uslovnog varijabiliteta $\sigma_h^2(1)$ u trenutku $h$+1, u oznaci $\hat{\sigma}_h^2(1)$ na osnovu podataka iz uzorka zaključno sa trenutkom $h$, je

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{h+1}^2 &= E(\sigma_{h+1}^2 \big| \Omega_h) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2 .\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dalje, po analogiji, ocjena uslovnog varijabiliteta $\sigma_h^2(2)$ u trenutku *h*+2, u oznaci $\hat{\sigma}_h^2(2)$ na osnovu podataka iz uzorka zaključno sa trenutkom *h*, dobija se na sledeći način:[27]

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{h+2}^2 &= E(\sigma_{h+2}^2 \big| \Omega_h) \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma}_h^2(1) + \alpha_1 E((\varepsilon_{h+1}^2 - 1)\big|\Omega_h)\sigma_{h+1}^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma}_h^2(1), \qquad jer \qquad E((\varepsilon_{h+1}^2 - 1)\big|\Omega_h) = 0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Uopšteno, ocjena uslovnog varijabiliteta $\sigma_h^2(l)$ u trenutku *h*+*l*, u oznaci $\hat{\sigma}_h^2(l)$ prema podacima iz uzorka zaključno sa trenutkom *h*, postaje:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_h^2(l) &= \alpha_0 \left[1 + (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-2}\right] + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}\hat{\sigma}_h^2(1) \\ &= \alpha_0 \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}\hat{\sigma}_h^2(1).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Kao što je već istaknuto, po definiciji je $\sum_{i=1}^{\max(u,v)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$, pa se za dovoljno dug horizont predviđanja ($h \to \infty$), prognoza uslovnog varijabiliteta svodi na $\frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}$, što znači da se za duži vremenski period svodi na bezuslovnu varijansu slučajnog člana $a_t$, u posmatranom modelu.

[27] Mladenović, Z., Mladenović P. (2007) Ocena parametra vrednosti pri riziku: Ekonometrijska analiza i pristup teorije ekstremnih vrednosti. Ekonomski anali br. 171. 32-73. str. 41.

Ako je u modelu GARCH(1,1) ispunjeno da je zbir parametara $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, tada se modelom opisuje proces neograničenog rasta uslovnog varijabiliteta. Takav model se zove integrisani GARCH model – IGARCH(1,1). Tada se, na osnovu relacije (2.16) za ocjenu buduće uslovne varijanse IGARCH(1,1) modela dobija

$$\hat{\sigma}_h^2(l) = \alpha_0(l-1) + \hat{\sigma}_h^2(1). \tag{2.17}$$

Dakle, prognoza uslovnog varijabiliteta na dugi rok zavisi od ocjene uslovnog varijabiliteta u prvom sledećem trenutku, od koje se dalje linearno povećava u zavisnosti od vrijednosti slobodnog člana $\alpha_0$ i horizonta predviđanja *l*. Drugim riječima, polazna ocjena volatilnosti ima trajni uticaj na prognozu dugoročne volatilnosti.

#### 2.5.1.2. RiskMetrics

Kompanija J. P. Morgan je razvila standardni pristup u mjerenju rizika – metodologiju RiskMetrics[28]. Ova metodologija podrazumijeva da neprekidnu kapitalizaciju dnevnih stopa prinosa na portfolio prati uslovna normalna raspodjela. Neka je $r_t$ logaritmovani dnevni prinos, a skup informacija dostupan do vremenskog trenutka *t*-1 je $\Omega_{t-1}$. Podrazumijeva se da je uslovna raspodjela serije logaritmovanih dnevnih prinosa data sa $r_t \big| \Omega_{t-1} : N(\mu_t, \sigma_t^2)$, gdje je $\mu_t$ uslovna očekivana vrijednost, a $\sigma_t^2$ je uslovna varijansa serije $r_t$. Za njih važe sledeće relacije:

$$\mu_t = 0, \qquad \sigma_t^2 = \alpha\sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha)\, r_{t-1}^2, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{2.18}$$

[28] Longerstaey, J., More, L. (1995) Introduction to RiskMetrics. Morgan Guaranty Trust Company of New York.

Pretpostavka modela je da logaritmovane dnevne cijene portfolija $p_t = \ln(P_t)$, zadovoljavaju diferencnu jednačinu $p_t - p_{t-1} = a_t$, a $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$ je IGARCH(1,1) proces bez konstante. Najčešće je vrijednost za parametar $\alpha$ u intervalu (0,9;1).

Kao što je ranije navedeno, za vremenski horizont od *k* perioda, logaritmovani prinos od trenutka *t*+1 do *t*+*k* (uključujući i *t*+*k*) je $r_t[k] = r_{t+1} + ... + r_{t+k-1} + r_{t+k}$. Tada je

$$\sigma_t^2[k] = Var(r_t[k] | \Omega_t) = \sum_{i=1}^{k} Var(a_{t+1} | \Omega_t). \tag{2.19}$$

Prognoza volatilnosti za jedan vremenski trenutak unaprijed pokazuje da je $\sigma_{t+1}^2 = \alpha\sigma_t^2 + (1-\alpha)r_t^2$. Iz prethodne relacije važi da je $Var(r_{t+i} | \Omega_t) = \sigma_{t+1}^2$ za $i \geq 1$, pa je, stoga $\sigma_t^2[k] = k\sigma_{t+1}^2$. To, drugim riječima, znači da važi $r_t[k] | \Omega_t : N(0, k\sigma_{t+1}^2)$, odnosno da je, pod ovim uslovima, uslovna varijansa serije $r_t[k]$ proporcionalna vremenskom horizontu *k*. Tada je uslovna standardna devijacija serije prinosa tokom *k* perioda $\sqrt{k}\sigma_{t+1}$.

Ako je vjerovatnoća 5%, rizik portfolija po RiskMetrics metodologiji se računa pomoću formule $1{,}65\sigma_{t+1}$, odnosno dnevna vrijednost VaR portfolija je

$$VaR = Vrijednost \quad finansijske \quad pozicije \times 1{,}65\sigma_{t+1}, \tag{2.20}$$

a za *k*-ti dnevni horizont posmatranja važi da je

$$VaR(k) = Vrijednost \quad finansijske \quad pozicije \times 1{,}65\sqrt{k}\sigma_{t+1}. \tag{2.21}$$

Dakle, po ovoj metodologiji postoji vremensko pravilo kvadratnog korijena za računanje VaR-a, tj.

$$VaR(k) = \sqrt{k} \times VaR. \tag{2.22}$$

Ako su logaritmovani prinosi izraženi u procentima, tada je 5% VaR za sledeći dan - $VaR = Vrijednost\ \ finansijske\ \ pozicije \times 1{,}65\sigma_{t+1} / 100$, a $\sigma_{t+1}$ je volatilnost procentualnih logaritmovanih prinosa.

Velika prednost metodologije RiskMetricsa je u jednostavnosti. Međutim, serije prinosa obično imaju "teške" repove – veću koncentraciju vjerovatnoće na krajevima raspodjele prinosa, pa pretpostavka o normalnosti raspodjele dovodi do potcjenjivanja vrijednosti VaR-a. Drugi metodi računanja VaR-a ne polaze od pretpostavke o normalnosti raspodjele.

Navedeno vremensko pravilo kvadratnog korijena koje se koristi u RiskMetrics tehnici je posljedica specifičnog modela ili pretpostavki koje su u njenoj osnovi. Naime, ovo pravilo ne važi ako pretpostavka o nultoj očekivanoj vrijednosti nije ispunjena, ili ako ne važi specijalan model IGARCH(1,1) logaritmovane serije prinosa. Razmotrimo model[29]

$$\begin{aligned} &r_t = \mu + a_t, \qquad a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \qquad \mu \neq 0, \\ &\sigma_t^2 = \alpha\sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha)a_{t-1}^2, \end{aligned} \tag{2.23}$$

gdje je $\varepsilon_t$ standardni proces bijelog šuma.

Navedena pretpostavka $\mu \neq 0$ važi za veliki broj serija koje se odnose na akcije kojima se trguje na svjetskim berzama. U tom slučaju serija prinosa $r_{t+1}$ ima normalnu raspodjelu $N(\mu, \sigma_{t+1}^2)$. Tada 5% kvantil za računanje VaR-a za jedinični period iznosi $\mu + 1{,}65\sigma_{t+1}$. Za vremenski horizont od $k$ perioda, serija prinosa $r_t[k]$ prati normalnu raspodjelu

[29] Formula $\sigma_t^2 = \alpha\sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha)r_{t-1}^2$ predstavlja jedan od najpoznatijih modela ponderisanja – eksponencijalno ponderisani pokretni prosjeci (EWMA), gdje se za ocjenu volatilnosti koriste samo ocijenjena varijansa i prinos iz prethodnog perioda. EWMA model može da se posmatra kao specijalan slučaj GARCH(1,1) modela, gdje je $\alpha_0 = 0$.

$N(k\mu, k\sigma_{t+1}^2)$, i 95% kvantil za računanje VaR-a je $k\mu + 1{,}65\sqrt{k}\sigma_{t+1} = \sqrt{k}(\sqrt{k}\mu + 1{,}65\sigma_{t+1})$. Dakle, u tom slučaju $VaR(k) \neq \sqrt{k} \times VaR$. Slično se može dokazati i ukoliko pretpostavka o posebnom obliku modela IGARCH(1,1) ne važi.

Ako investitor posjeduje više oblika finansijske aktive, RiskMetrics metoda koristi isti pristup u obračunu VaR-a, tj. polazi se od pretpostavke da logaritmovane dnevne serije prinosa svake finansijske pozicije prate IGARCH(1,1) model slučajnog hoda. Dodatno treba izračunati unakrsne koeficijente korelacije između serija prinosa. Razmotrimo slučaj sa dvije pozicije. Parametre vrijednosti pri riziku za svaku od njih označićemo sa $VaR_1$ i $VaR_2$, respektivno. Tada je koeficijent korelacije ove dvije pozicije $\rho_{12} = Cov(r_{1t}, r_{2t}) / \sqrt{Var(r_{1t})Var(r_{2t})}$, a cjelokupna vrijednost VaR-a iznosi

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{12}VaR_1VaR_2} \tag{2.24}$$

Uopšte, za *m* finansijskih pozicija, ukupna vrijednost VaR-a biće

$$VaR = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} VaR_i^2 + 2\sum_{i<j}^{m} \rho_{ij}VaR_iVaR_j}\,. \tag{2.25}$$

Ova formula važi pod pretpostavkom da je zajednička raspodjela logaritmovanih prinosa pozicija uključenih u portfolio multivarijaciona normalna sa nultom očekivanom vrijednosti i matricom kovarijanse $\Sigma_{t+1}$. Pod takvom pretpostavkom, logaritmovana vrijednost prinosa portfolija ima normalnu raspodjelu sa nultom očekivanom vrijednosti i konačnom varijansom. Na taj način može se jednostavno izračunati parametar vrijednosti pri riziku za određeni portfolio više finansijskih sredstava na osnovu poznatih vrijednosti tog parametra za pojedinačne pozicije, koje učestvuju u portfoliju.

### 2.5.2. Neparametarski modeli

Uopšte, na osnovu svega navedenog, može se zaključiti da parametarski modeli za obračun VaR-a potcjenjuju parametar vrijednosti pri riziku, jer pretpostavka o normalnosti standardizovanih reziduala nije konzistentna sa ponašanjem finansijskih prinosa. Glavna prednost ovih modela je što omogućavaju kompletno određivanje raspodjele prinosa. Izbjegavanjem pretpostavke koja je u osnovi parametarskih modela, moguće je poboljšati njihove rezultate.[30] Neparametarski modeli, sa druge strane, nemaju specifičnu pretpostavku o raspodjeli prinosa, osim te da data raspodjela ostaje da važi i za vrijeme perioda predviđanja. U neparametarske modele spadaju varijante istorijske simulacije, kojom se dobija kvantilna ocjena parametra pri riziku, i to: 1. istorijska simulacija, 2. hibridni model (eksponencijalno ponderisani model istorijske simulacije), 3. volatilno ponderisani model istorijske simulacije, i 4. filtrirana istorijska simulacija. Navedeni modeli se objašnjavaju u nastavku.

#### 2.5.2.1. Istorijska simulacija – kvantilna ocjena

Pod pretpostavkom da je raspodjela prinosa u periodu predviđanja ista kao u uzorkovanom periodu, neka su $r_1,...,r_n$ prinosi portfolija u posmatranom periodu uzorka. Tada se date vrijednosti urede po veličini u rastući niz oblika $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq ... \leq r_{(n)}$, sa prvom minimalnom i poslednjom maksimalnom vrijednosti.

Pretpostavimo, dalje, da su prinosi nezavisne i jednako raspodijeljene slučajne promjenljive sa neprekidnom raspodjelom, čija je funkcija gustine vjerovatnoće $f(x)$, a odgovarajuća funkcija kumulativne raspodjele $F(x)$.

[30] Manganelli, S., Engle, R. F. (2001) Op. cit. str. 9.

Neka je $x_p$ $p$-ti kvantil funkcije $F(x)$, odnosno $x_p = F^{-1}(p)$. Pod pretpostavkom da važi da je $f(x_p) \neq 0$, tada statistika $r_{(l)}$, gdje je $l = np$, $0 < p < 1$, ima približno normalnu raspodjelu sa srednjom vrijednosti $x_p$ i varijansom $p(1-p)/n[f(x_p)]^2$, tj.

$$r_{(l)} : N(x_p, \frac{p(1-p)}{nf^2(x_p)}), \qquad l = np. \tag{2.26}$$

Vjerovatnoća $p$, koja se koristi u konkretnom slučaju, ne mora da bude takva da zadovolji pravilo da je $np$ pozitivan cijeli broj. U tom slučaju se koristi jednostavan metod interpolacije za dobijanje ocjena kvantila. Naime, tada se odrede dvije susjedne pozitivne veličine $l_1$ i $l_2$, tako da je $l_1 < np < l_2$. Odavde važi da je $p_i = l_i / n$. Pošto je očigledno da važi da je $p_1 < p < p_2$, tada se kvantil $x_p$ ocjenjuje kao

$$\hat{x}_p = \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} r_{(l_1)} + \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} r_{(l_2)} \tag{2.27}$$

Nedostatak ovog metoda je prije svega u pretpostavci o nepromijenjenoj raspodjeli prinosa iz uzorka, koja važi i za period predviđanja, što znači da ocjena predviđenog gubitka ne može da bude veća od nekog već istorijski ostvarenog nivoa, a to definitivno u praksi ne važi. U literaturi koja se tiče upravljanja rizikom se često ova osobina opisuje kao „vožnja automobila gledajući unazad u retrovizor“.[31] Dalje, ako je vjerovatnoća $p$ mala, empirijski kvantil ne predstavlja efikasnu ocjenu teorijskog kvantila. Zato se obično u stvarnoj upotrebi, empirijski kvantil koristi kao donja granica prave vrijednosti VaR-a. Takođe, ovom metodu se zamjera što su sve opservacije iz uzorka jednako tretirane, odnosno imaju iste pondere. U tom slučaju jednakog tretiranja svih opservacija, današnji šok na tržištu može se „izravnati“ (uprosječiti) ako je veličina posmatranog uzorka dovoljno velika, i može se desiti da tako ekstrem uopšte ne bude primijećen, izuzev pri visokim nivoima značajnosti.

[31] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Op. cit. str. 51.

#### 2.5.2.2. Hibridni model – eksponencijalno ponderisani model istorijske simulacije (EWHS)

Ovu posebnu varijaciju modela istorijske simulacije su uveli Boudoukh, Richardson i Whitelaw (1998). Ovaj hibridni model kombinuje RiskMetrics i metodu istorijske simulacije, upotrebom eksponencijalno opadajućih pondera na prošle prinose portfolija. Najprije se za najskorijih K prinosa $r_t, r_{t-1},..., r_{t-K+1}$ izvrši dodjeljivanje pondera $\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}, (\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K})\lambda,..., (\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K})\lambda^{K-1}$, tim redom (treba primijetiti da se član $\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}$ u ponderima koristi samo da bi njihov zbir bio 1). Zatim se prinosi poređaju u rastući niz. Da bi se odredio $\theta\%$ VaR, sabiraju se odgovarajući ponderi dok se ne dostigne nivo $\theta\%$, počevši od najmanjeg prinosa u nizu. VaR portfolija tada predstavlja prinos koji odgovara poslednjem ponderu koji se upotrijebi u datom zbiru. Boudoukh, Richardson i Whitelaw koriste za $\lambda$ vrijednost od 0,97 i 0,99 (važi da je $0 < \lambda < 1$).

Navedenim ponderisanjem hibridni model postiže značajno poboljšanje, jer vrijednosti prinosa koje su više udaljene u uzorku imaju manje učešće. Strogo govoreći, treba naglasiti da nijedan od ovih metoda nije isključivo neparametarski, jer je za kvantil neophodna parametarska specifikacija. Ista ideja važi i za CAViaR metodologiju, koja se svrstava u semiparametarske modele.

#### 2.5.2.3. Volatilno ponderisani model istorijske simulacije (VWHS)

Hull i White su 1998. predložili da se prinosi usklađuju sa promjenama volatilnosti. Shodno tome, uvodi se obrazac za prinose $r_t^*$ na sledeći način

$$r_t^* = \sigma_T \frac{r_t}{\sigma_t}, \tag{2.28}$$

gdje je $\sigma_t$ ocijenjena dnevna varijansa u vremenu *t*, $r_t$ je istorijski prinos a $\sigma_T$ je najskorija ocjena varijanse ostvarena u vremenu *T*. Uopšteno govoreći, prinosi se standardizuju varijansama (volatilnošću) i zatim skaliraju tekućom varijansom. Ovaj pristup predstavlja direktnu nadogradnju metoda istorijske simulacije, gdje su uzete u obzir fluktuacije volatilnosti u ocjenjivanju VaR-a. Tehnike poput EWMA i GARCH mogu da se koriste za ocjenu procesa volatilnosti i za objašnjavanje grupisanja volatilnosti. Ovaj pristup daje veće ocjene VaR-a od bazične istorijske simulacije[32].

#### 2.5.2.4. Filtrirana istorijska simulacija (FHS)

Pristup filtrirane istorijske simulacije, koji je postao dosta popularan među analitičarima rizika, razvili su Barone-Adesi, Bourgoin i Giannopoulos 1998. godine. Ovdje se najprije proces volatilnosti prilagođava prinosima (EWMA, GARCH ili neki drugi model), a onda se prinosi (ili reziduali $\varepsilon_t$) standardizuju sa ocjenama volatilnosti – tj. formiraju se vrijednosti $z_t = r_t / \sigma_t$. Takođe, treba otkloniti heteroskedastičnost. Tada se primjenjuje bootstrap metoda na standardizovane prinose $z_t$. Bootstrap metoda slučajno bira opservacije sa ponavljanjem[33] iz uzorka, dok se ne dostigne veličina izvornog uzorka. To se radi *N* puta (obično 500, 1000 ili 5000 puta). Na kraju se novoformirani uzorci skaliraju tekućom volatilnošću $\sigma_T$, i svaki uzorak daje ocjenu prinosa za sledeći dan, a VaR se računa za željeni nivo povjerenja.

Filtrirana istorijska simulacija zahtijeva prilagođavanje podataka iz uzorka nekom modelu (najčešće model tipa GARCH), kako bi se ocijenile prognoze uslovne varijanse (volatilnosti), koje treba da formiraju niz standardizovanih prinosa $z_t$ koji su nezavisni i

[32] Dowd, K. (2005) Measuring market risk (2nd edition). Wiley Series in Frontiers in Finance, John Wiley & sons Ltd. Chichester, West Sussex, United Kingdom.
[33] Jedna ista opservacija može da bude više puta izabrana u uzorak.

imaju istu raspodjelu. Parametar vrijednosti pri riziku na osnovu filtrirane istorijske simulacije se dobija množenjem $\alpha-$kvantila serije standardizovanih prinosa sa prognozom volatilnosti:[34]

$$VaR(\alpha)_{t+1} = \sigma_{t+1} \cdot F^{-1}(\alpha), \tag{2.29}$$

gdje je $\sigma_{t+1}$ prognoza volatilnosti izvedena iz ocijenjenog modela volatilnosti, a $F^{-1}$ je inverzna funkcija kumulativne funkcije gustine empirijske raspodjele reziduala, ili jednostavnije, $\alpha-$kvantil funkcije $F$.

Iako filtrirana istorijska simulacija uzima u obzir promjenljive tržišne uslove, povezivanjem modeliranja uslovne varijanse sa empirijskom raspodjelom, Pritsker (2001) pokazuje da ocjena parametra vrijednosti pri riziku ne daje dobre rezultate u predviđanju ekstremnih događaja.

### 2.5.3. Semiparametarski modeli

U semiparametarske modele spada primjena teorije ekstremnih vrijednosti, uslovni autoregresioni parametar vrijednosti pri riziku (CAViaR), primjena tehnike regresije kvantila i GARCH model kvazimaksimalne vjerodostojnosti. Prednost ovih modela je takođe u manjem broju pretpostavki, u odnosu na parametarske modele, koje moraju biti ispunjene kako bi ocjene imale statističku validnost. Ovdje su izloženi navedeni modeli izuzev teorije ekstremnih vrijednosti, koja je posebno izdvojena kao tema sledećeg poglavlja.

[34] Rossignolo, A.F., Duygun Fethi, M., Shaban, M. (2012) Value-at-Risk models and Basel capital charges: Evidence from Emerging and Frontier stock markets. Journal of Financial Stability 8 (4), 303-319.

### 2.5.3.1. CAViaR (Uslovni autoregresioni parametar vrijednosti pri riziku)

Ovaj model su formulisali Engle i Manganelli[35] 1999. godine. Osnovna ideja je da se direktno modelira razvoj kvantila kroz vrijeme, umjesto modeliranja kompletne raspodjele prinosa portfolija. Činjenica da se kroz vrijeme volatilnosti prinosa portfolija grupišu, može se prevesti na statistički jezik da je njihova raspodjela autokorelisana. S obzirom da je VaR vezan za standardnu devijaciju raspodjele, onda i taj parametar mora da pokazuje isto ponašanje. Da bi se formalizovala ova karakteristika treba uzeti neki autoregresivni model – u ovom slučaju je to CAViaR.

Posmatramo vektor prinosa portfolija $\{r_t\}_{t=1}^{T}$. Neka je $\theta$ vjerovatnoća pridružena VaR-u, $x_t$ je vektor posmatranih promjenljivih u vremenu *t*, a $\beta$ je *p*-vektor nepoznatih parametara. Takođe, neka je $f_t(\beta) \equiv f_t(x_{t-1}, \beta_\theta)$ $\theta$-kvantil za trenutak *t* raspodjele prinosa portfolija u trenutku *t*-1. Specifikacija modela CAViaR je

$$f_t(\beta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i f_{t-i}(\beta) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j l(x_{t-j}) \tag{2.30}$$

gdje je dimenzija vektora $\beta$ $p = q + r + 1$, a $l$ je funkcija konačnog broja zaostalih (legiranih) vrijednosti posmatranih promjenljivih. Autoregresivni članovi $\beta_i f_{t-i}(\beta), \quad i = 1,...,q$ omogućavaju da se kvantil glatko mijenja kroz vrijeme. Uloga člana $l(x_{t-j})$ sastoji se u tome da poveže $f_t(\beta)$ sa posmatranim promjenljivim iz niza informacija kojima se raspolaže. Inače, može se primijetiti da ovaj član odgovara krivoj uticaja informacija ili vijesti u GARCH modelima. A prirodno se nameće da su najbolji izbor za $x_{t-j}$ zaostali prinosi. I zaista, sa sve većim negativnim vrijednostima $r_{t-1}$ dolazi do porasta VaR-a, jer loš dan povećava vjerovatnoću da će se ponoviti takav. Takođe,

[35] Engle, R. F., Manganelli, S. (2004) CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. Journal of Business and Economic Statistics. Vol. 22, No. 4. 367-381. str. 368.

veoma dobri dani na tržištu mogu da povećaju VaR, što je slučaj sa modelima volatilnosti, pa se zaključuje da VaR zavisi simetrično od $|r_{t-1}|$.

Različiti modeli mogu da se formulišu biranjem različite specifikacije funkcije *l*. Neki alternativni modeli su simetrična apsolutna vrijednost:[36]

$$f_t(\beta) = \beta_1 + \beta_2 f_{t-1}(\beta) + \beta_3 |r_{t-1}|, \tag{2.31}$$

zatim asimetrični nagib (koeficijent pravca), u oznaci

$$f_t(\beta) = \beta_1 + \beta_2 f_{t-1}(\beta) + \beta_3 |r_{t-1}|^+ + \beta_4 |r_{t-1}|^-, \tag{2.32}$$

i indirektni GARCH(1,1) model:

$$f_t(\beta) = (\beta_1 + \beta_2 f_{t-1}^2(\beta) + \beta_3 r_{t-1}^2)^{1/2}. \tag{2.33}$$

Specijalan slučaj CAViaR-a je model koji su predložili Chernozhukov i Umantsev 2000. godine. Oni su postavili da je $\beta_1 = 0$ a funkcija $l = x_t'\beta$.

Nepoznati parametri se ocjenjuju tehnikom ne-linearne regresije kvantila. Posmatrajmo model

$$r_t = f(r_{t-1}, x_{t-1}, ..., r_1, x_1; \beta^0) + \varepsilon_{t\theta} \equiv f_t(\beta^0) + \varepsilon_{t\theta}, t = 1,...,T \quad Quant_\theta(\varepsilon_{t\theta}|\Omega_t) = 0, \tag{2.34}$$

gdje je $\Omega_t$ skup informacija koje su raspoložive u trenutku *t*, a relacija $Quant_\theta(\varepsilon_{t\theta}|\Omega_t) = 0$ jednostavno znači da je $\theta$-kvantil greške modela jednak nuli. White je 1994. godine pokazao da minimiziranje funkcije cilja regresije kvantila (što su prvi

[36] Engle, R. F., Manganelli, S. (2004) Op. cit. str. 369.

uveli 1978. godine Koenker i Bassett) može da obezbijedi konzistentne ocjene, pod određenim pretpostavkama:[37]

$$\min_t \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{[\theta - I(r_t < f_t(\beta)]\cdot[r_t - f_t(\beta)]\} \tag{2.35}$$

Jedina pretpostavka u pristupu CAViaR je da je proces kvantila ispravno modeliran. Inače, nije neophodna nikakva pretpostavka o raspodjeli grešaka modela, što smanjuje rizik pogrešne specifikacije.

#### 2.5.3.2. GARCH model kvazimaksimalne vjerodostojnosti

Kao što je poznato, i već pomenuto, pretpostavka o normalno raspodijeljenim standardizovanim rezidualima suprotstavljena je činjenici da finansijski podaci najčešće imaju teške repove raspodjele. Ispostavilo se, međutim, da pretpostavka o normalnosti nije toliko restriktivna kao što se smatra. Naime, zahvaljujući tome što su Bollerslev i Woolridge 1992. pokazali u svom radu, poznato je da maksimizacija normalne GARCH vjerodostojnosti dovodi do konzistentnih ocjena, pod uslovom da je varijansa ispravno specificirana, čak iako standardizovani reziduali nijesu normalno raspodijeljeni. Takav model je poznat pod imenom GARCH model kvazimaksimalne vjerodostojnosti.

Mnogi radovi su se bavili ovom problematikom. Na primjer, u svom radu iz 1991. godine Engle i Gonzalez-Rivera su dali semiparametarsku ocjenu GARCH modela. Više puta pomenuti autori Engle i Manganelli (1999) predlažu računanje VaR-a portfolija tako što se prvo odredi GARCH model kvazimaksimalne vjerodostojnosti, pa se onda množe empirijske vrijednosti kvantila standardizovanih reziduala sa ocijenjenom standardnom devijacijom. Ovaj metod ocjenjivanja predstavlja spoj GARCH modela prilagođenog

[37] Detaljnije vidjeti: Engle, R. F., Manganelli, S. (2004) CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. Journal of Business and Economic Statistics. Vol. 22, No. 4. 367-381, i Manganelli, S., Engle, R. F. (2001) Value at risk models in finance. ECB Working Paper No. 75. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=356220.

prinosima portfolija i istorijske simulacije primijenjene na standardizovane rezuduale. Stoga, u sebi sadrži i neke nedostatke ova dva modela. Naime, u takvom slučaju je neophodno ispuniti pretpostavku da su standardizovani reziduali nezavisni i jednako raspodijeljeni. S obzirom na to, logička nedosljednost istorijske simulacije je riješena. S druge strane, ostaje problem prekidnosti ekstremnih prinosa. Istorijska simulacija vodi do veoma loše i nestabilne ocjene kvantila u repovima, pa je logična alternativa da se umjesto istorijske simulacije primijeni teorija ekstremnih vrijednosti. Takav model su ocijenili McNeil i Frey 2000. godine. Dobra strana takvog spoja ova dva pristupa je da zahtijeva mali broj pretpostavki: da je varijansa ispravno specificirana, da su standardizovani reziduali nezavisni i da imaju istu raspodijelu, kao i da su u maksimalnom domenu privlačenja neke raspodjele ekstremnih vrijednosti.

Osnovna razlika između navedenih modela za ocjenu parametra vrijednosti pri riziku proizilazi iz načina na koji ocjenjuju moguće promjene u vrijednosti posmatranog prinosa ili portfolija, odnosno u ocjeni raspodjele prinosa. Modeli CaViaR preskaču taj korak ocjene raspodjele, pošto obezbjeđuju ocjenu parametra direktno iz kvantila raspodjele.

Razlike između ocijenjenih vrijednosti parametra VaR na osnovu svih navedenih modela mogu biti drastične. Beder (1995) razmatra osam različitih metodologija za ocjenu VaR-a i primjenjuje ih na tri hipotetička portfolija.[38] Rezultati pokazuju ogromne razlike u ocjenama VaR-a između različitih metodologija, gdje ocjene VaR-a variraju više od 14 puta za isti portfolio. Prema tome, u cilju odlučivanja u izboru metodologije koja će se koristiti u praktičnom smislu, neophodno je razumjeti pretpostavke čije ispunjenje pojedini modeli zahtijevaju, kao i matematičke modele i kvantitativne tehnike koje se koriste. To je osnovni korak kome treba posvetiti pažnju, kako bi i ocjena parametra vrijednosti pri riziku bila objektivnija.Najbolji praktični rezultati dolaze upotrebom kvantitativnih modela kada se njihovom izboru, u prvoj fazi analize, posveti dužna pažnja.

[38] Manganelli, S., Engle, R. F. (2001) Value at risk models in finance. Op. cit. str. 8.

Sledeće poglavlje disertacije je posvećeno teoriji ekstremne vrijednosti, koja predstavlja moderan pristup u modeliranju rizika i koja se sve više koristi sa značajnim uspjehom u predviđanju ekstremnih događaja.

## III TEORIJA EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI

Teorija ekstremnih vrijednosti je veoma dobar metodološki okvir za proučavanje ponašanja repa raspodjele. U poslednjih nekoliko godina se značajno povećava njena upotreba u finansijskoj literaturi, za rješavanje velikog broja problema. Tradicionalno se statistika bavi aritmetičkom sredinom, i takva diskusija se bazira na Centralnoj graničnoj teoremi po kojoj statistika

$$\frac{(X_1+...+X_n)/n-E(X)}{\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X)}{n}}}=\frac{X_1+...+X_n-nE(X)}{\sqrt{n\,\mathrm{var}(X)}} \tag{3.1}$$

ima približno standardnu normalnu raspodjelu, kada $n \to \infty$. Drugim riječima, Centralna granična teorema se bavi zbirom slučajnih promjenljivih $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ i traži konstante $a_n > 0$ i $b_n \in R$, tako da standardizovana promjenljiva $Y_n = \frac{S_n - b_n}{a_n}$ konvergira u raspodjeli nekoj nedegenerisanoj raspodjeli.[39] Ako se radi o zbiru ili prosjeku nezavisnih i jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih, data granična raspodjela je najčešće normalna, ili *stabilna raspodjela* ako ima "teže" repove.

Ako se, umjesto prosjeka, bavimo problemima maksimuma uzorka, dolazimo do glavnog matematičkog problema koji je u osnovi teorije ekstremnih vrijednosti.

Treba napomenuti da postoje dva glavna tipa modela za ekstremne vrijednosti. Tradicionalni modeli su modeli blok maksimuma, koji se koriste za modeliranje maksimalnih opservacija iz velikih uzoraka, dok drugu grupu čine modeli vrhova iznad datog praga, koji se sve više koriste i pokazuju kao efikasniji u praksi. To su modeli koji koriste sve velike opservacije koje premašuju određeni nivo, i upravo zbog toga se smatraju efikasnijim u davanju ekstremnih rezultata.

[39] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., Teugels, J. (2004) Statistics of Extremes: Theory and Applications. Wiley, Chichester. str. 46.

### 3.1. Metod blok maksimuma

Pri proučavanju ekstremnih slučajnih događaja, kao i samih ekstremnih vrijednosti, neophodno je razmatrati određeni broj maksimalnih vrijednosti (koje su veće od ostalih), a ne samo jednu izolovanu maksimalnu vrijednost u nekoj familiji posmatranih slučajnih promjenljivih. Metod blok maksimuma grupiše niz slučajnih promjenljivih $X_1, X_2, ...$ hronološki u više blokova, a zatim se u svakom bloku bira najveća vrijednost.

Neka je $X_1, X_2, ...$ niz nezavisnih i jednako raspodijeljenih nedegenerisanih slučajnih promjenljivih, sa zajedničkom funkcijom raspodjele *F*. Posmatrajmo maksimalne vrijednosti promjenljivih ($M_1 = X_1$)

$$M_n = \max(X_1, ..., X_n), \tag{3.2}$$

gdje je $n \geq 2$. Do istih rezultata se može doći i za istovjetni problem koji se odnosi na minimume, transformacijom:

$$\min(X_1, ..., X_n) = -\max(-X_1, ..., -X_n). \tag{3.3}$$

Za zajedničku funkciju raspodjele maksimuma $M_n$, na osnovu osobine njihove nezavisnosti, važi:

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, ..., X_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} F(x) = F^n(x). \tag{3.4}$$

Neka je *desni kraj* raspodjele *F* označen sa

$$x_F = \sup(x \in R : F(x) < 1). \tag{3.5}$$

Tada, za svako $x < x_F$, važi,

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.6}$$

a, u slučaju $x_F < \infty$, za $x \geq x_F$ je

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) = 1. \tag{3.7}$$

Dakle, funkcija raspodjele sa porastom $n \to \infty$, postaje degenerisana. Da bi se dobila nedegenerisana granična raspodjela, neophodno je izvršiti normalizaciju.[40] Taj postupak se objašnjava u nastavku, čime se formira uopštena raspodjela ekstremnih vrijednosti.

Takođe, nedegenerisana granična raspodjela ima definisanu određenu oblast privlačenja maksimuma, pa se navedeni pojmovi definišu u nastavku poglavlja, nakon čega slijedi ocjena parametara vrijednosti pri riziku metodom blok maksimuma.

### 3.1.1. Uopštena raspodjela ekstremnih vrijednosti

Problem se svodi na određivanje realnih konstanti $a_n > 0$ i $b_n$, tako da promjenljiva $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ ima nedegenerisanu graničnu raspodjelu, kako $n \to \infty$, odnosno $\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$. $G$ predstavlja funkciju nedegenerisane raspodjele, a takve raspodjele se zovu *raspodjele ekstremnih vrijednosti*.

[40] De Haan, L., Ferreira, A. (2006) Extreme Value Theory: An Introduction. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, str. 4.

**Teorema 3.1. (Fisher-Tippet teorema)**[41]

Neka je $(X_n)$ niz nezavisnih i jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih. Ako postoje konstante $a_n > 0$ i $b_n \in R$, i nedegenerisana funkcija raspodjele *G*, tako da važi

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \to G, \tag{3.8}$$

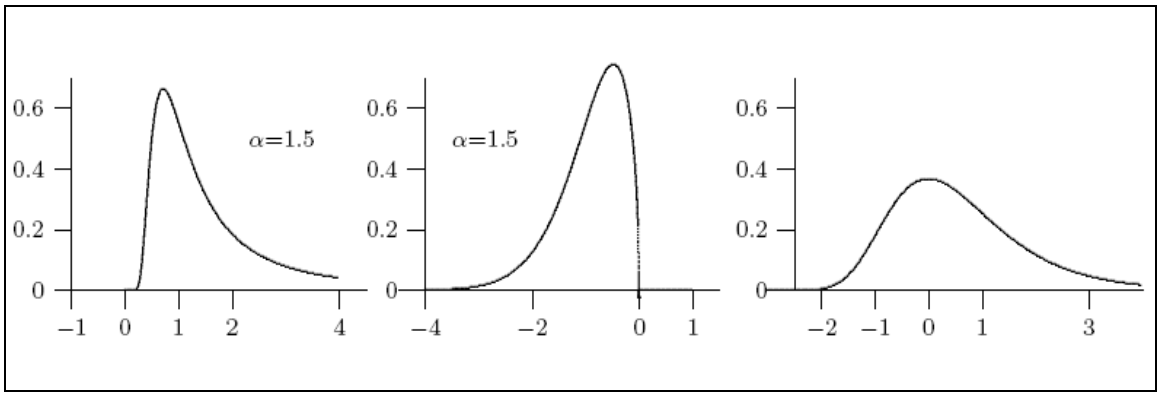
tada *G* pripada jednom od tri tipa funkcija raspodjele:

$$\begin{aligned}
&\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0. \\
&\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0. \\
&\Lambda(x) = \exp\left\{-e^{-x}\right\}, \qquad x \in R.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Konkretno date raspodjele poznate su pod sledećim imenima: $\Phi_\alpha(x)$ je *Frešeova* raspodjela, $\Psi_\alpha(x)$ je *Vejbulova* raspodjela i $\Lambda_\alpha(x)$ je *Gumbelova* raspodjela. Grafik 3.1. predstavlja funkcije gustine navedenih raspodjela.

[41] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin. str. 121.

**Grafik 3.1.** Frešeova, Vejbulova i Gumbelova funkcija gustine raspodjele




Izvor: Gilli, M., Kellezi, E., 2006. An application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. Computational Economics 27(2-3), 207-228.

Alternativno, granične raspodjele ekstremnih vrijednosti se definišu objedinjeno na sledeći način:

**Teorema 3.2. (Fisher i Tippet (1928), Gnedenko (1943))**

Klasa raspodjela ekstremnih vrijednosti je $G_\gamma(ax+b)$ sa $a_n > 0$ i $b_n \in R$, $\gamma \in R$, gdje je

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}), & \gamma \neq 0, \quad 1+\gamma x > 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \gamma = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Ovakva granična raspodjela zove se *uopštena raspodjela ekstremnih vrijednosti*. Parametar $\gamma$ predstavlja *parametar oblika*, a $\alpha = 1/\gamma$ se zove *indeks repa* raspodjele. Iz ovakvog oblika parametarske familije raspodjela ekstremnih vrijednosti, izvode se prethodno definisana tri tipa raspodjela, uz smjenu $\gamma = 1/\alpha$ za Frešeovu raspodjelu i $\gamma = -1/\alpha$ za Vejbulovu raspodjelu.

Takođe, treba naglasiti da se, osim ove tri navedene funkcije raspodjele date sa (3.9), kao granične raspodjele ekstremnih vrijednosti mogu koristiti i sve funkcije koje nastaju

njihovom linearnom transformacijom argumenata.[42] Na primjer, klasa Frešeovih raspodjela zadaje se na sledeći način:

$$\Phi_{\gamma,\beta_n,\alpha_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < \beta_n \\ \exp(-(\frac{x-\beta_n}{\alpha_n})^{-1/\gamma}), & x \geq \beta_n. \end{cases} \tag{3.11}$$

Parametar $\beta_n$ je *parametar lokacije*, a $\alpha_n > 0$ je *parametar razmjere*.

Grafički, kao što se vidi sa grafika 3.1., Vejbulova raspodjela ima konačan desni kraj, dok, sa druge strane Gumbelova i Frešeova raspodjela imaju beskonačne desne krajeve, ali primjetno je da je brzina opadanja Frešeove raspodjele manja od Gumbelove (Frešeov rep je „teži“).[43] Zato je logično da se, za upravljanje rizikom, Frešeova familija raspodjela najviše koristi.

Raspodjele ekstremnih vrijednosti su prvi put dobijene u radu Fishera i Tippetta (1928), a Gnedenko (1943) je postavio potrebne i dovoljne uslove pri kojima neka funkcija raspodjele pripada oblastima privlačenja,[44] što se izlaže u nastavku.

### 3.1.2. Oblast privlačenja maksimuma

Neka postoje realne konstante $a_n$ i $b_n$ ($a_n > 0$), tako da za svako *n* važi

$$\lim_{n\to\infty} P\{(M_n - b_n)/a_n \leq x\} = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), \tag{3.12}$$

[42] Mladenović, Z., Mladenović P. (2007) Op. cit. str. 45.
[43] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Op. cit. str. 265.
[44] Mladenović, Z., Mladenović P. (2007) Op. cit.. str. 46.

za nedegenerisanu funkciju raspodjele *G(x)*. Ako važi ovaj uslov, kaže se da je *F* u oblasti privlačenja makismuma od *G*, odnosno $F \in D(G)$.

Uloga uopštenih raspodjela ekstremnih vrijednosti se formuliše na osnovu sledeće teoreme:

**Teorema 3.3. (Fisher-Tippet)**

$$F \in D(G) \Rightarrow \text{G je tipa } G_\gamma \text{ za dato } \gamma. \tag{3.13}$$

U suštini, sve poznate neprekidne raspodjele su u oblasti privlačenja od $G_\gamma$ za neku vrijednost $\gamma$. Frešeova familija raspodjela uključuje stabilne raspodjele, Pareto i Studentovu t-raspodjelu. Gumbelova klasa raspodjela obuhvata normalnu i lognormalnu raspodjelu koje se u literaturi nazivaju raspodjelama „lakih“ repova. Gnedenko je (1943.) dao sledeću karakterizaciju za Frešeovu klasu raspodjela:

**Teorema 3.4.** Za $\gamma > 0$,

$$F \in D(G) \Leftrightarrow 1 - F(x) = x^{-1/\gamma} L(x), \tag{3.14}$$

za određenu sporo promjenljivu funkciju *L(x)*.[45]

To znači da su u Frešeovoj klasi raspodjela, raspodjele sa repovima koji predstavljaju pravilno promjenljive funkcije sa negativnim indeksom promjene.

---

[45] Definicija (sporo promjenljive i pravilno promjenljive funkcije)

(i) Pozitivna mjerljiva funkcija *L* je sporo promjenljiva u beskonačnosti ako

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad t > 0.$$

(ii) Pozitivna mjerljiva funkcija *h* je pravilno promjenljiva u beskonačnosti sa indeksom $\rho \in R$ ako

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\rho, \quad t > 0.$$

Raspodjela ekstremnih vrijednosti sadrži tri parametra - $\gamma$ - *parametar oblika*, $\beta_n$ - *parametar lokacije*, a $\alpha_n > 0$ je *parametar razmjere.* Oni se mogu ocijeniti na dva načina: pomoću parametarskih ili neparametarskih metoda.

### 3.1.3. Ocjena parametara metodom blok maksimuma

Što se tiče podataka, ako posmatramo uzorkovane podatke, postoji samo jedan minimum, odnosno maksimum. Nemoguće je izvršiti ocjenu parametara na osnovu jednog podatka, pa se u literaturi najprije razvio metod blok maksimuma, koji ima za ideju da se uzorak podijeli na nekoliko podskupova – blokova čiji podaci se ne preklapaju, pa se iz svakog bloka izabere ekstremna vrijednost. Ovdje će se prikazati postupak sa maksimalnim ekstremnim slučajevima.

Matematičkim jezikom, ako se raspolaže podacima o prinosima $r_i$, kojih ima ukupno T[46] u uzorku, treba ih podijeliti na *g* blokova sa po *n* podataka, a zbog jednostavnosti neka je $T = ng$. Ako nije izvodljivo na taj način podijeliti sve podatke iz uzorka na blokove, odnosno ako je $T = ng + m$, gdje je naravno ostatak *m* takav da je $1 \le m \le n$, onda se briše prvih *m* opservacija iz uzorka, zbog pravila vremenske važnosti podataka (najstariji podaci se, na taj način, brišu).[47] Dakle, blokovi podataka su:

$$\left\{ r_1, \ldots, r_n \middle| r_{n+1}, \ldots, r_{2n} \middle| r_{2n+1}, \ldots, r_{3n} \middle| \ldots \middle| r_{(g-1)n+1}, \ldots, r_{ng} \right\}. \tag{3.15}$$

Neka su opaženi prinosi obilježeni sa $r_{in+j}$, gdje je $1 \le j \le n$, a $i = 0, \ldots, g-1$. Što se tiče izbora veličine *n*, treba naglasiti da *n* treba da bude dovoljno veliko da se teorija

[46] Vremenski posmatran prinos.
[47] Neki autori predlažu i da poslednji blok podataka ima manju veličinu – vidjeti: Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 346.

ekstremnih vrijednosti može primijeniti na svaki blok podataka. Obično, $n$ odgovara broju dana trgovanja na tržištu, u mjesecu, kvartalu ili godini.

Neka je $r_{n,i}$ maksimalna vrijednost prinosa u $i$-tom bloku, odnosno:

$$r_{n,i} = \max_{1 \le j \le n} \{ r_{(i-1)n+j} \}, \qquad i = 1, \ldots, g. \tag{3.16}$$

Metod blok maksimuma bira maksimume blokova $\{r_{n,i}\}$, i oni čine podatke koji se koriste za ocjenu parametara raspodjele ekstremnih vrijednosti. Logično je zaključiti, da će date ocjene zavisiti od izbora same veličine bloka, $n$.

Na ovako izabrane podatke, može se primijeniti parametarski pristup (metod maksimalne vjerodostojnosti i metod regresije) ili neparametarski pristup za ocjenu parametara vrijednosti pri riziku, metodom blok maksimuma. Tri navedena metoda se izlažu u nastavku disertacije (metod maksimalne vjerodostojnosti, metod regresije i neparametarski pristup).

#### 3.1.3.1. Metod maksimalne vjerodostojnosti

Pod pretpostavkom da maksimumi blokova prate uopštenu raspodjelu ekstremnih vrijednosti, tako da je funkcija gustine vjerovatnoće standardizovanih promjenljivih $\dfrac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n}$ data sa[48]

$$g_\gamma(x) = \begin{cases} (1+\gamma x)^{-1/\gamma - 1} \exp\left[-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\right] & \gamma \neq 0, \\ \exp\left[-x - \exp(-x)\right] & \gamma = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

[48] Prosto se dobija diferenciranjem generalisane granične raspodjele date sa (3.10)

jednostavnom transformacijom dobija se

$$g(r_{n,i}) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n}\left[1+\frac{\gamma_n(r_{n,i}-\beta_n)}{\alpha_n}\right]^{-(1+\gamma_n)/\gamma_n} \exp\left[-(1+\frac{\gamma_n(r_{n,i}-\beta_n)}{\alpha_n})^{-1/\gamma_n}\right], & \gamma_n \neq 0, \\ \frac{1}{\alpha_n}\exp\left[-\frac{r_{n,i}-\beta_n}{\alpha_n}-\exp(-\frac{r_{n,i}-\beta_n}{\alpha_n})\right], & \gamma_n = 0, \end{cases}$$

gdje je $1+\gamma_n(r_{n,i}-\beta_n)/\alpha_n > 0$ ako je $\gamma_n \neq 0$. Parametru oblika $\gamma$ je dodata oznaka *n* u indeksu da bi se naglasilo da ocijenjena vrijednost ovog parametra zavisi od izbora veličine *n*, kao što je već napomenuto. Kod metoda maksimalne vjerodostojnosti, pretpostavlja se da je ta veličina dovoljno velika, da se, bez obzira na to da li su podaci međusobno nezavisni ili ne, može zaključiti da su opservacije blok maksimuma nezavisne.[49] Tada je funkcija vjerodostojnosti, uz logaritmovanje:

$$\begin{aligned} \ell(r_{n,i},...,r_{n,g}|\gamma_n,\alpha_n,\beta_n) &= \prod_{i=1}^{g} f(r_{n.i}) \\ &= \sum_{i=1}^{g} \ln f(r_{n.i}) \\ &= -g\ln\alpha_n - (1+\frac{1}{\gamma})\sum_{i=1}^{g}\ln(1+\gamma\frac{r_{n,i}-\beta_n}{\alpha_n}) - \sum_{i=1}^{g}(1+\gamma\frac{r_{n,i}-\beta_n}{\alpha_n})^{-1/\gamma}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pokazalo se da su ovakve ocjene konzistentne i asimptotski efikasne (što je Smith pokazao 1985. godine za slučaj $\gamma > -1/2$).

Neka je $p^*$ mala vjerovatnoća u gornjem repu koja pokazuje mogući gubitak, a $r_n^*$ predstavlja $(1-p^*)$-ti kvantil maksimuma podperioda (blok maksimuma) pod graničnom uopštenom raspodjelom ekstremnih vrijednosti. Tada je

[49] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Op. cit. str. 272.

$$1-p^* = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1+\dfrac{\gamma_n(r_n^*-\beta_n)}{\alpha_n}\right]^{-1/\gamma_n}\right\}, & \gamma_n \neq 0, \\ \exp\left[-\exp(-\dfrac{r_n^*-\beta_n}{\alpha_n})\right], & \gamma_n = 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

gdje je $1+\gamma_n(r_n^*-\beta_n)/\alpha_n > 0,$ ako je $\gamma_n \neq 0$. Ako se zapiše u logaritamskom obliku, imamo:

$$\ln(1-p^*) = \begin{cases} -\left[1+\dfrac{\gamma_n(r_n^*-\beta_n)}{\alpha_n}\right]^{-1/\gamma_n}, & \gamma_n \neq 0, \\ -\exp(-\dfrac{r_n^*-\beta_n}{\alpha_n}), & \gamma_n = 0, \end{cases} \tag{3.20}$$

a dati kvantil je

$$r_n^* = \begin{cases} \beta_n - \dfrac{\alpha_n}{\gamma_n}\left\{1-\left[-\ln(1-p^*)\right]^{-\gamma_n}\right\}, & \gamma_n \neq 0, \\ \beta_n - \alpha_n \ln\left[-\ln(1-p^*)\right], & \gamma_n = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

Za datu vrijednost $p^*$, kvantil $r_n^*$ je parametar VaR koji se odnosi na podperiod, tj. za blok maksimum. Da bi se došlo do veze između blok maksimuma i cijele serije opaženih prinosa $r_i$, može se iskoristiti relaciju (3.4), jer većina serija prinosa ili ima slabu serijsku korelaciju ili je nema uopšte. Time važi

$$1-p^* = P(r_{n,i} \leq r_n^*) = \left[P(r_i \leq r_n^*)\right]^n. \tag{3.22}$$

Ova veza nam omogućava da definišemo VaR za seriju originalnih prinosa $r_i$. Konkretno, za određenu malu vjerovatnoću u gornjem repu *p*, (1-*p*)-ti kvantil za $r_i$ je $r_n^*$, ako je vjerovatnoća $p^*$ za blok maksimum izabrana na osnovu relacije (3.22), gdje je $P(r_i \le r_n^*) = 1 - p.$ Odavde slijede obrasci za računanje VaR-a finansijske pozicije sa logaritmovanim prinosima $r_i$:[50]

$$VaR = \begin{cases} \beta_n - \dfrac{\alpha_n}{\gamma_n}\left\{1 - \left[-n\ln(1-p)\right]^{-\gamma_n}\right\}, & \gamma_n \ne 0, \\ \beta_n - \alpha_n \ln\left[-n\ln(1-p)\right], & \gamma_n = 0, \end{cases} \tag{3.23}$$

gdje je *n* veličina bloka u uzorku, a *p* je data vjerovatnoća.

Na kraju još treba pomenuti da ocjene parametara zavise i od izbora veličina *n* i *g*. Naime, sa povećanjem vrijednosti za *n*, ostvaruje se bolja aproksimacija raspodjele blok maksimuma uopštenom raspodjelom ekstremnih vrijednosti, kao i niska pristrasnost u parametarskim ocjenama. Ali, s druge strane, sa povećanjem *n* dolazi do smanjenja *g*, za ograničen broj svih podataka *T* kojima raspolažemo. A što je veći broj blokova - vrijednost *g*, to je veći broj raspoloživih podataka za ovaj metod, što vodi do manje varijanse u ocjenama parametara. Dakle, mora se voditi računa o obje veličine i napraviti neki kompromis.

#### 3.1.3.2. Metod regresije

Metod regresije uzima za pretpostavku da podaci blok maksimuma, u oznaci $\{r_{n,i}\}_{i=1}^{g}$, predstavljaju slučajan uzorak sa uopštenom raspodjelom ekstremnih vrijednosti, datom sa (3.10). Tada se mogu uzeti u obzir osobine statistika poretka. Naime, neka su podaci blok maksimuma poređani u rastući niz:

[50] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 355.

$$r_{n(1)} \leq r_{n(2)} \leq ... \leq r_{n(g)}. \tag{3.24}$$

Po navedenim osobinama, važi da je:[51]

$$E\{G_{\gamma}(x_{n(i)})\} = \frac{i}{g+1}, \qquad i = 1,..., g. \tag{3.25}$$

Za slučaj $\gamma \neq 0$, na osnovu (3.10) i (3.25), uz aproksimaciju očekivane vrijednosti sa posmatranom vrijednosti, dalje važi

$$\frac{i}{g+1} = \exp(-(1+\gamma_n \frac{r_{n(i)} - \beta_n}{\alpha_n})^{-1/\gamma_n}), \qquad i = 1,..., g. \tag{3.26}$$

Kada se obje strane jednakosti dva puta logaritmuju, dobija se jednakost

$$\ln\left[-\ln\frac{i}{g+1}\right] = -\frac{1}{\gamma_n}\ln(1+\gamma_n \frac{r_{n(i)} - \beta_n}{\alpha_n}), \qquad i = 1,..., g. \tag{3.27}$$

Neka je $e_i$ razlika između prethodne dvije veličine i pod pretpostavkom da serija $\{e_i\}$ nije korelisana, model regresije je

$$\ln\left[-\ln\frac{i}{g+1}\right] = -\frac{1}{\gamma_n}\ln(1+\gamma_n \frac{r_{n(i)} - \beta_n}{\alpha_n}) + e_i, \qquad i = 1,..., g. \tag{3.28}$$

Tada se ocjene parametara $\gamma_n$, $\beta_n$ i $\alpha_n$ dobijaju metodom najmanjih kvadrata (MNK).

[51] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 347.

U slučaju kad je $\gamma_n = 0,$ postavka regresije svodi se na

$$\ln\left[-\ln\frac{i}{g+1}\right] = -\frac{1}{\alpha_n} r_{n(i)} + \frac{\beta_n}{\alpha_n} + e_i, \qquad i = 1,\ldots, g. \tag{3.29}$$

Ocjene metodom najmanjih kvadrata su konzistentne, ali manje efikasne u odnosu na metod maksimalne vjerodostojnosti.

#### 3.1.3.3. Neparametarski pristup

Postoje dva neparametarska metoda za računanje parametra oblika raspodjele prinosa, koje su predložili Hill (1975) i Pickands 1975. godine, koji i nose naziv po njima. Kod ovih ocjena nema potrebe za formiranjem blokova maksimuma, već se direktno primjenjuju na kompletne podatke, tj. prinose $\{r_t\}_{t=1}^{T}$. Neka su vrijednosti prinosa uređene u rastući niz:

$$r_{(1)} \le r_{(2)} \le \ldots \le r_{(T)}. \tag{3.30}$$

Ocjene Hilla i Pickandsa definišu se, respektivno, kao:

$$\begin{aligned} \gamma_h(q) &= \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\left[\ln r_{(T-i+1)} - \ln r_{(T-q)}\right], \\ \gamma_p(q) &= \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{r_{(T-q+1)} - r_{(T-2q+1)}}{r_{(T-2q+1)} / r_{(T-4q+1)}}, \quad q \le T/4, \end{aligned} \tag{3.31}$$

gdje je $q$ pozitivan cijeli broj. Izbor veličine $q$ varira, ali nema opšteg dogovora oko najbolje vrijednosti. Ono što se po nekim autorima može zaključiti je da je ocjena

parametra oblika konzistentna kada se povećava $q$ dovoljno velikom brzinom, kao i veličina uzorka $T$. Hill-ova ocjena se može primijeniti samo na Frešeovu raspodjelu, ali je zato i efikasnija u odnosu na ocjenu Pickandsa.[52]

### 3.1.4. VaR za duži vremenski period

Ranije navedeno vremensko pravilo kvadratnog korijena koje se koristi u RiskMetrics metodologiji predstavlja specijalan slučaj u teoriji ekstremnih vrijednosti. Veza između VaR ocjene za 1 dan i ocjene za horizont od $h$ dana je

$$VaR(h) = h^{1/\alpha} VaR = h^{\gamma} VaR. \tag{3.32}$$

U literaturi se ovo zove vremensko pravilo $\alpha$ korijena. Treba voditi računa da je ovdje $\alpha = 1/\gamma$, ranije definisani indeks repa, a ne parametar razmjere $\alpha_n$.

### 3.1.5. Nivo prinosa (Return level)

Mjera rizika koja se odnosi na ekstremne vrijednosti blokova zove se *nivo prinosa*. Nivo prinosa za $g$ blokova veličine $n$, u oznaci $L_{n,g}$, predstavlja nivo koji se premašuje u jednom na svakih $g$ blokova veličine $n$:

$$P(r_{n,i} > L_{n,g}) = \frac{1}{g}. \tag{3.33}$$

[52] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 348.

Blok u kojem je premašen nivo prinosa predstavlja *stresni period*. Za dovoljno veliko $n$ (tako da normalizovani $r_{n,i}$ prate uopštenu raspodjelu ekstremnih vrijednosti), nivo prinosa se računa na sledeći način:[53]

$$L_{n,g} = \beta_n - \frac{\alpha_n}{\gamma_n}\left\{1 - \left[-\ln(1-\frac{1}{g})\right]^{-\gamma_n}\right\}, \qquad \gamma_n \neq 0. \tag{3.34}$$

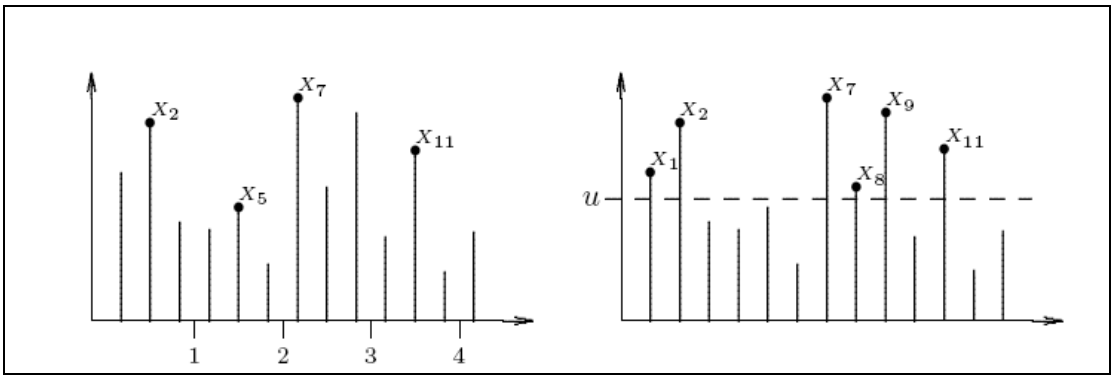
Treba primijetiti da je ovo, u stvari, kvantil raspodjele ekstremnih vrijednosti iz (3.21) sa vjerovatnoćom $p^* = 1/g$. Drugim riječima, nivo prinosa se odnosi na blok maksimum a ne na osnovne prinose, i u tome je i osnovna razlika između VaR-a i nivoa prinosa, kao mjera rizika.

### 3.2. Metod vrhova iznad datog praga

Prethodno objašnjeni metod blok maksimuma veoma rasipa podatke, jer se koriste samo maksimalne vrijednosti iz velikih blokova. To se inače navodi i kao najveći nedostatak ovog modela, pa se sve više zamjenjuje u praksi sa metodom koji se bazira na prekoračenjima nekog praga, gdje se koriste svi podaci koji predstavljaju ekstreme u smislu da premašuju određeni visoki nivo. Drugim riječima, metod vrhova iznad datog praga koristi sve podatke koji prekoračuju dati (visoki) prag, kao i vremenske jedinice u kojima su se data prekoračenja dogodila.

[53] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 358.

**Grafik 3.2.** Grafički prikaz ideje izbora podataka u analizi: metod blok maksimuma (lijevi grafik) i metod vrhova iznad datog praga (desni grafik)




Izvor: Gilli, M., Kellezi, E., 2006. An application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. Computational Economics 27(2-3), 207-228.

Ako određeni prag označimo sa *u*, a posmatramo seriju dnevnih logaritmovanih prinosa $r_t$, tada ako se *i*-to prekoračenje dogodi *i*-tog dana, ovaj model se fokusira na podatke uređenog para ($t_i, r_{t_i} - u$). U suštini, vrijeme ostvarenja prekoračenja govori o intenzitetu pojavljivanja važnih „rijetkih događaja“[54] – grupisanja, tj. o tendenciji stvaranja klastera i sl. Drugi podatak uređenog para daje informaciju o kvantitativno izraženom iznosu prekoračenja. Ovo fundamentalno mijenja statistički pogled na problem, jer umjesto da koristimo marginalnu raspodjelu (odnosno graničnu raspodjelu ekstremnih vrijednosti), ovaj novi pristup koristi uslovnu raspodjelu za obradu prekoračenja pod uslovom da dato mjerenje premašuje prag.

Kod prethodnog metoda blok maksimuma postojala je dilema oko biranja veličine bloka – *n*. Ovdje nema te dileme, ali se postavlja pitanje – kako odabrati određeni prag? Svakako da nivo praga zavisi i od same serije koja se posmatra, pa će se za stabilniju seriju izabrati manji prag, dok će se kod serije izražene volatilnosti prag više postaviti. Ovim problemom su se detaljnije bavili Danielsson i De Vries (1997), a takođe se polemiše i da li je to isključivo statističko pitanje, ili bi različite finansijske institucije trebalo da imaju slobodu definisanja praga, usljed različite tolerancije na rizik.[55]

[54] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 359.
[55] Ibid, str. 359.

### 3.2.1. Uopštena Pareto raspodjela

Osnovna teorija novog pristupa razmatra uslovnu raspodjelu prinosa *r*, koji premašuju prag $u$ ($r > u$), $r = x + u$, za graničnu raspodjelu maksimuma datu sa (3.10). Tada je uslovna raspodjela za $r \le x + u$, pod uslovom da je dati prag prekoračen, $r > u$:

$$P(r \le x + u | r > u) = \frac{P(u \le r \le x + u)}{P(r > u)} = \frac{P(r \le x + u) - P(r \le u)}{1 - P(r \le u)} \tag{3.35}$$

Tada se, koristeći $G_\gamma(x)$ kumulativnu funkciju raspodjele iz (3.10) i aproksimaciju $e^{-y} \approx 1 - y$, dobija

$$\begin{aligned} P(r \le x + u | r > u) &= \frac{G_\gamma(x+u) - G_\gamma(u)}{1 - G_\gamma(u)} \\ &= \frac{\exp\left\{-\left[1 + \frac{\gamma(x+u-\beta)}{\alpha}\right]^{-1/\gamma}\right\} - \exp\left\{-\left[1 + \frac{\gamma(u-\beta)}{\alpha}\right]^{-1/\gamma}\right\}}{1 - \exp\left\{-\left[1 + \frac{\gamma(u-\beta)}{\alpha}\right]^{-1/\gamma}\right\}} \\ &\approx 1 - \left[1 + \frac{\gamma x}{\alpha + \gamma(u-\beta)}\right]^{-1/\gamma}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

gdje je $x > 0$ i $1 + \gamma(u - \beta)/\alpha > 0$.

Glavna raspodjela koja se koristi za modeliranje prekoračenja preko praga je *uopštena Pareto raspodjela* koja se definiše na sledeći način:[56]

[56] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 361.

$$G_{\gamma,\psi(u)}(x) = \begin{cases} 1-(1+\dfrac{\gamma x}{\psi(u)})^{-1/\gamma}, & \gamma \neq 0, \\ 1-\exp(-\dfrac{x}{\psi(u)}), & \gamma = 0, \end{cases} \tag{3.37}$$

gdje je $\psi(u) > 0$, i $x \geq 0$ za $\gamma \geq 0$, a $0 \leq x \leq -\psi(u)/\gamma$ kada je $\gamma < 0$. Dakle, na osnovu relacije (3.36) zaključujemo da se uslovna raspodjela od *r*, pod uslovom da je $r > u$, dobro aproksimira *uopštenom Pareto raspodjelom* sa parametrima $\gamma$ i $\psi(u) = \alpha + \gamma(u - \beta)$. Parametar $\psi(u)$ je *parametar razmjere*, a $\gamma$ je *parametar oblika*.

Uopštena Pareto raspodjela ima jednu važnu osobinu. Ako je raspodjela prekoračenja od *r* sa datim pragom $u_0$ uopštena Pareto raspodjela sa parametrom oblika $\gamma$ i parametrom razmjere $\psi(u_0)$, tada je za proizvoljan prag $u > u_0$ raspodjela prekoračenja datog praga *u* takođe uopštena Pareto raspodjela sa parametrom oblika $\gamma$ i parametrom razmjere $\psi(u) = \psi(u_0) + \gamma(u - u_0)$.

Kada je parametar $\gamma = 0$, tada se uopštena Pareto raspodjela svodi na ekosponencijalnu raspodjelu. Zbog ove činjenice se predlaže[57] da se grafički vrši provjera ponašanja repa raspodjele pomoću Q-Q grafika (QQ plot). Ako je $\gamma = 0$, tada je grafik približno linearan.

### 3.2.2. Poissonov proces tačaka

Pretpostavlja se da skokovi u cijenama akcija prate određeni zakon vjerovatnoće. Isto važi i za vjerovatnoću prekoračenja datog praga. Ovdje se definiše proces tačaka i Poissonov proces na kojima se baziraju prekoračenja iznad datog praga za navedeni model.

[57] Mladenović, Z., Mladenović P. (2007) Op. cit.. str. 51. i Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 361.

Neka $\{X_i : i \in I\}$ predstavlja lokacije tačaka iz skupa *I*, koje se slučajno ostvaruju u prostoru *S*. Proces tačaka *N* broji broj tačaka u regijama prostora *S*:

$$N(A) = \sum_{i \in I} 1(X_i \in A), \qquad A \subseteq S. \tag{3.38}$$

Očekivani broj tačaka u skupu *A* dat je mjerom intenziteta $\Lambda(A) = E[N(A)]$. Ako je prostor *S* Euklidov prostor ili njegov podskup, i ako mjera intenziteta $\Lambda$ ima funkciju gustine $\lambda : S \to [0, \infty)$, odnosno ako je $\Lambda(A) = \int_A \lambda(x)dx$, tada $\lambda$ predstavlja *funkciju intenziteta procesa*.[58]

Poissonov proces je najčešći tip procesa tačaka. Proces tačaka N sa mjerom intenziteta $\Lambda$ predstavlja Poissonov proces ako su ispunjena sledeća 2 uslova:

(i) Za svaki skup $A \subset S$ $i$ $k \geq 0$,

$$P(N(A) = k) = \begin{cases} e^{-\Lambda(A)} \dfrac{\Lambda(A)^k}{k!}, & \Lambda(A) < \infty, \\ 0, & \Lambda(A) = \infty. \end{cases}$$

(ii) za svaki pozitivan cijeli broj k i za sve međusobno disjunktne skupove $A_1, ..., A_k$, slučajne promjenljive $N(A_1), ..., N(A_k)$ su nezavisne.

Bitno je praviti razliku između homogenog i nehomogenog Poissonovog procesa. Poissonov proces na Euklidovom prostoru ili njegovom podskupu je *homogen* ako je njegova funkcija intenziteta $\lambda$ konstantna; u suprotnom je Poissonov proces nehomogen.

Proces obilježenih tačaka broji iznos $Y_i$ za svaku tačku $X_i$, i označava se sa:

[58] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., Teugels, J. (2004) Op. cit. str. 170.

$$N(A) = \sum_{i \in I} Y_i 1(X_i \in A), \tag{3.39}$$

gdje su obilježja $Y_i$ jednako raspodijeljena. Dakle, proces tačaka je specijalan slučaj opšteg procesa obilježenih tačaka gdje su obilježja jednaka jedinici.

### 3.2.3. Biranje praga *u*

Kao što je već navedeno, model vrhova iznad datog praga ima problem koji se tiče izbora adekvatnog praga. Evo kako se u praksi najčešće grafički rješava dati problem.

Za dati visoki prag $u_0$, neka važi da prekoračenje $r - u_0$ prati uopštenu Pareto raspodjelu sa parametrima $\gamma$ i $\psi(u_0)$, gdje je $0 < \gamma < 1$. Tada je *srednje prekoračenje* preko praga $u_0$:

$$E(r - u_0 | r > u_0) = \frac{\psi(u_0)}{1 - \gamma}. \tag{3.40}$$

Tada se, za svako $u > u_0$, definiše *funkcija srednjeg prekoračenja* u oznaci *e(u)*:

$$e(u) = E(r - u | r > u) = \frac{\psi(u_0) + \gamma(u - u_0)}{1 - \gamma}. \tag{3.41}$$

Kao što se može vidjeti iz prethodne formule, za određenu vrijednost $\gamma$, funkcija srednjeg prekoračenja je linearna funkcija prekoračenja $u - u_0$. Stoga se, za određivanje

odgovarajućeg praga $u_0$, najčešće koristi jednostavan grafički metod. Definiše se *empirijska funkcija srednjeg prekoračenja* kao[59]

$$e_T(u) = \frac{1}{N_u}\sum_{i=1}^{N_u}(r_{t_i} - u), \tag{3.42}$$

gdje je $N_u$ broj prinosa koji premašuju prag *u*, a $r_{t_i}$ su vrijednosti odgovarajućih prinosa. Konačno, prag *u* se bira tako da je empirijska funkcija srednjeg prekoračenja približno linearna za $r > u$.

### 3.2.4. Ocjene parametara metodom vrhova iznad datog praga

Smith je 1989. godine razmatrao zajedno prekoračenja i vrijeme prekoračenja, pa je predložio Poissonov proces sa dvije promjenljive $(t_i, r_{t_i})$ za modeliranje ekstremnih vrijednosti. Neka je *D* osnovni vremenski interval (obično je to godinu dana, odnosno 252, kao broj dana trgovanja u godini). Neka je *t* vremenski interval podataka (npr. dnevni podaci), $t = 1,2,...,T$, gdje je *T* ukupan broj podataka kojima raspolažemo. Za određeni prag *u*, posmatramo par podataka – vrijeme prekoračenja i opaženi logaritmovani prinos - $(t_i, r_{t_i})$.

Uređeni par $(t_i, r_{t_i})$ zajedno formira Poissonov proces, u dvije dimenzije sa mjerom intenziteta, datom sa:

$$\Lambda\left[(D_2, D_1)\times(r,\infty)\right] = \frac{D_2 - D_1}{D} S(r,\gamma,\alpha,\beta), \tag{3.43}$$

[59] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 362.

gdje je

$$S(x,\gamma,\alpha,\beta)=\left[1+\frac{\gamma(r-\beta)}{\alpha}\right]_{+}^{-1/\gamma},$$

$0 \le D_1 \le D_2 \le T$, $x > u$, $\alpha > 0$, $\beta$ i $\gamma$ su parametri, a oznaka $[x]_+$ definiše se kao $[x]_+ = \max(x,0)$. Drugim riječima, ovom mjerom intenziteta, ostvarenje prekoračenja datog praga je proporcionalno dužini vremenskog intervala $[D_1, D_2]$, i vjerovatnoća se određuje funkcijom doživljenja *S*. Funkcija doživljenja slučajne promjenljive *X* je $S(x) = P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - CDF(x)$.[60] U slučaju kada je $\gamma = 0$, mjera intenziteta je granična vrijednost, kada $\gamma \to 0$, odnosno:[61]

$$\Lambda\left[(D_2, D_1)\times(r,\infty)\right]=\frac{D_2-D_1}{D}\exp\left[\frac{-(r-\beta)}{\alpha}\right]. \tag{3.44}$$

Zašto se baš koristi ova mjera intenziteta, data sa (3.43)? Njena upotreba postaje jasnija ako se razmotri uslovna vjerovatnoća prekoračenja $r = x + u$ pod uslovom da je $r > u$ u vremenskom intervalu $[0, D]$:

$$\frac{\Lambda\left[(0,D)\times(x+u,\infty)\right]}{\Lambda\left[(0,D)\times(u,\infty)\right]}=\left[\frac{1+\gamma(x+u-\beta)/\alpha}{1+\gamma(u-\beta)/\alpha}\right]^{-1/\gamma}=\left[1+\frac{\gamma x}{\alpha+\gamma(u-\beta)}\right]^{-1/\gamma}.$$

Rezultat predstavlja funkciju doživljenja uslovne raspodjele datu sa (3.36) koja se dobija na osnovu granične raspodjele ekstremnih vrijednosti iz relacije (3.10). Na ovaj način se pravi direktna veza između 2 navedena metoda - metoda blok maksimuma i metoda vrhova iznad datog praga, koji se u literaturi sve češće zovu tradicionalni i novi pristup teorije ekstremnih vrijednosti.

[60] CDF je oznaka za kumulativnu funkciju raspodjele, što se i može zaključiti iz navedene formule.
[61] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 363.

Alternativno, mjera intenziteta može da se napiše na sledeći način:[62]

$$\Lambda\left[(D_{2,}D_1)\times(r,\infty)\right]=\int_{D_1}^{D_2}\int_r^{\infty}\lambda(t,z;\gamma,\alpha,\beta)dzdt, \tag{3.45}$$

sa mjerom intenziteta definisanom kao

$$\lambda(t,z;\gamma,\alpha,\beta)=\frac{1}{D}g(z;\gamma,\alpha,\beta), \tag{3.46}$$

gdje je

$$g(z;\gamma,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}\left[1+\dfrac{\gamma(z-\beta)}{\alpha}\right]^{-(1+\gamma)/\gamma}, & \gamma\neq 0,\\ \dfrac{1}{\alpha}\exp\left[\dfrac{-(z-\beta)}{\alpha}\right], & \gamma=0.\end{cases}$$

Funkcija vjerodostojnosti za dati proces za dvije dimezije $[0,T]\times(u,\infty)$ je

$$L(\gamma,\alpha,\beta)=\left[\prod_{i=1}^{N_u}\frac{1}{D}g(r_{t_i};\gamma,\alpha,\beta)\right]\exp\left[-\frac{T}{D}S(u;\gamma,\alpha,\beta)\right]. \tag{3.47}$$

Parametri $\gamma$, $\alpha$ i $\beta$ se ocjenjuju maksimiziranjem logaritma ove funkcije vjerodostojnosti. Pošto je parametar razmjere $\alpha$ nenegativan, može se koristiti $\ln(\alpha)$ u ocjeni parametara maksimiziranjem logaritmovane funkcije vjerodostojnosti.

Za datu vjerovatnoću p u gornjem repu, (1-*p*)-ti kvantil logaritmovanog prinosa $r_t$ je

[62] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 364.

$$VaR = \begin{cases} \beta - \dfrac{\alpha}{\gamma}\left\{1 - \left[-D\ln(1-p)\right]^{-\gamma}\right\} & \gamma \neq 0, \\ \beta - \alpha \ln\left[-D\ln(1-p)\right] & \gamma = 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

Ocjena parametra pri riziku je dosta stabilnija primjenom metoda vrhova iznad datog praga u poređenju sa metodom blokova. Naime, kod tradicionalnog pristupa (metod blokova) ocjena parametra vrijednosti pri riziku je veoma osjetljiva na promjene veličine blokova $n$.

Postoji i alternativna formula za parametar vrijednosti pri riziku. Neka je $p$ mala vjerovatnoća u donjem repu. Tada je $q = 1 - p.$ VaR se računa na osnovu obrasca

$$VaR_q = u - \frac{\psi(u)}{\gamma}\left\{1 - \left[\frac{T}{N_u}(1-q)\right]^{-\gamma}\right\}. \tag{3.49}$$

Naime, na osnovu (3.36) i (3.37) može se zaključiti da je

$$\frac{G_\gamma(x+u) - G_\gamma(u)}{1 - G_\gamma(u)} \approx G_{\gamma,\psi(u)}(x).$$

Ako se ocijeni kumulativna funkcija raspodjele prinosa $G_\gamma(u)$ preko empirijske kumulativne funkcije raspodjele, tada je

$$\hat{F}(u) = \frac{T - N_u}{T} = 1 - \frac{N_u}{T},$$

a na osnovu navedenih relacija, dalje slijedi

$$G_\gamma(x+u) = G_\gamma(u) + G(x)\left[1 - G_\gamma(u)\right] \approx 1 - \frac{N_u}{T}\left[1 + \frac{\gamma(x+u-u)}{\psi(u)}\right]^{-1/\gamma}. \qquad (3.50)$$

Izraz za VaR u (3.49) dobija se tada kao $q$-ti kvantil od $G_\gamma(x+u)$.

Mjera očekivani gubitak (Expected shortfall), kao očekivani deficit pod uslovom da je VaR prekoračen, tada se definiše kao

$$ES_q = E(r \mid r > VaR_q) = VaR_q + E(r - VaR_q \mid r > VaR_q), \qquad (3.51)$$

odnosno

$$ES_q = \frac{VaR_q}{1-\gamma} + \frac{\psi(u) - \gamma u}{1-\gamma}. \qquad (3.52)$$

Na osnovu navedenih formula, kao i definicije mjere očekivanog gubitka, primjenom na iste podatke, rezultat za očekivani gubitak će uvijek biti veći od parametra vrijednosti pri riziku.

Metod vrhova iznad datog praga ima veliku praktičnu upotrebu jer može da proširi analizu parametra VaR vezom sa drugim finansijskim veličinama, što se objašnjava u nastavku disertacije.

### 3.2.5. Objašnjavajuće promjenljive

Uticaj nekih objašnjavajućih promjenljivih na prinose je u praksi često izražen, pa takve objašnjavajuće promjenljive se vrlo lako mogu uključiti u model vrhova iznad datog praga. Npr., volatilnost $\sigma_t^2$ utiče na prinose i predstavlja jednu takvu promjenljivu.

Ako je $y_t = (y_{1t},...,y_{\upsilon t})'$ vektor od $\upsilon$ objašnjavajućih promjenljivih čiji podaci su raspoloživi do vremenskog trenutka *t*, pretpostavimo da se tri parametra $\gamma$, $\alpha$ i $\beta$ mijenjaju tokom vremena i da predstavljaju linearne funkcije objašnjavajućih promjenljivih, odnosno važi

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 y_{1t} + ... + \varepsilon_\upsilon y_{\upsilon t} \equiv \varepsilon_0 + \varepsilon' y_t, \\ \ln \alpha_t &= \delta_0 + \delta_1 y_{1t} + ... + \delta_\upsilon y_{\upsilon t} \equiv \delta_0 + \delta' y_t, \\ \beta_t &= \theta_0 + \theta_1 y_{1t} + ... + \theta_\upsilon y_{\upsilon t} \equiv \theta_0 + \theta' y_t. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Za sva tri navedena parametra, koriste se iste objašnjavajuće promjenljive u relaciji (3.53), što naravno u konkretnoj primjeni ne mora da bude ispunjeno, već mogu različite objašnjavajuče promjenljive da utiču na različite parametre. Ako je $\varepsilon = 0$, tada je parametar oblika $\gamma_t = \varepsilon_0$, odnosno vremenski je nepromjenljiv – konstantan. Stoga je od velikog značaja testirati značajnost vektora $\varepsilon$ kako bi se ocijenio doprinos objašnjavajućih promjenljivih na parametar oblika $\gamma_t = \varepsilon_0$.

Podsjećanja radi, kao što je ranije definisano, u slučaju da tri parametra raspodjele ekstremnih vrijednosti nijesu konstantni, tada je Poissonov proces *nehomogen*. Mjera intenziteta, u tom slučaju, je[63]

$$\Lambda\left[(D_1, D_2) \times (r, \infty)\right] = \frac{D_2 - D_1}{D}\left[1 + \frac{\gamma_t (r - \beta_t)}{\alpha_t}\right]_+^{-1/\gamma_t}, \qquad r > u. \tag{3.54}$$

Za Poissonov proces sa dvije dimenzije koje predstavljaju vrijeme prekoračenja i prinos $(t_i, r_{t_i})$ funkcija vjerodostojnosti postaje

[63] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 371.

$$L = \left[ \prod_{i=1}^{N_u} \frac{1}{D} g(r_{t_i}; \gamma_{t_i}, \alpha_{t_i}, \beta_{t_i}) \right] \exp\left[ -\frac{1}{D} \int_0^T S(u; \gamma_t, \alpha_t, \beta_t) dt \right], \tag{3.55}$$

koja se svodi na

$$L = \left[ \prod_{i=1}^{N_u} \frac{1}{D} g(r_{t_i}; \gamma_{t_i}, \alpha_{t_i}, \beta_{t_i}) \right] \exp\left[ -\frac{1}{D} \sum_{t=1}^{T} S(u; \gamma_t, \alpha_t, \beta_t) \right], \tag{3.56}$$

ako se pretpostavi da su parametri $\gamma_t$, $\alpha_t$ i $\beta_t$ konstantni u okviru svakog dana trgovanja, a funkcije $g(r_{t_i}; \gamma_{t_i}, \alpha_{t_i}, \beta_{t_i})$ i $S(u; \gamma_t, \alpha_t, \beta_t)$ su date sa (3.46) i (3.43). Dati parametri se ocjenjuju iz funkcije vjerodostojnosti date sa (3.56) maksimiziranjem logaritmovanog oblika funkcije.

### 3.2.6. Provjera modela

Provjera modela vrhova iznad datog praga se sastoji iz tri dijela. Prvo treba provjeriti adekvatnost stope prekoračenja, zatim provjeriti raspodjelu prekoračenja, i, na kraju, da li je ispunjena pretpostavka o nezavisnosti u modelu.

Prva provjera u modelu vezana za stopu prekoračenja, odnosi se na vrijeme prekoračenja, odnosno duraciju. Naime, osnovna osobina Poissonovog procesa za jednu pronjenljivu je da su vremenske duracije između dva uzastopna događaja nezavisne i da imaju eksponencijalnu raspodjelu. Analogno tome, kod Poissonovog procesa za dvije promjenljive, treba provjeriti da li duracije između uzastopnih prekoračenja prate eksponencijalnu raspodjelu, odnosno ako je $t_0 = 0$, tada su duracije

$$z_{t_i} = \int_{t_i - 1}^{t_i} \frac{1}{D} g(u; \gamma_s, \alpha_s, \beta_s) ds, \qquad i = 1,2,...$$

međusobno nezavisne i prate standardnu eksponencijalnu raspodjelu. S obzirom da su dnevni prinosi opservacije prekidne slučajne promjenljive, vremenske duracije su tada

$$z_{t_i} = \frac{1}{D} \sum_{t=t_{i-1}+1}^{t_i} S(u; \gamma_t, \alpha_t, \beta_t). \tag{3.57}$$

Provjera se vrši grafičkim putem. Q-Q grafik pokazuje približno pravu liniju ako je model adekvatan.

Ranije je rečeno da je uslovna raspodjela prekoračenja iznad praga $u$ - uopštena Pareto raspodjela sa parametrom oblika $\gamma_t$ i parametrom razmjere $\psi_t = \alpha_t + \gamma_t(u - \beta_t)$. Tada se, na osnovu veze između standardne eksponencijalne i uopštene Pareto raspodjele definišu funkcije[64]

$$\omega_{t_i} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_{t_i}} \ln(1 + \gamma_{t_i} \frac{r_{t_i} - u}{\psi_{t_i}})_+ & \gamma_{t_i} \neq 0, \\ \frac{r_{t_i} - u}{\psi_{t_i}} & \gamma_{t_i} = 0. \end{cases} \tag{3.58}$$

Ako je model adekvatan, $\{\omega_{t_i}\}$ su nezavisni i eksponencijalno raspodijeljeni sa očekivanom vrijednosti 1. Onda se i grafički može izvršiti provjera, putem Q-Q grafika.

Nakon korigovanja za uticaje objašnjavajućih promjenljivih, poslednja pretpostavka o nezavisnosti se svodi na ispitivanje autokorelacije formiranih funkcija $z_{t_i}$ i $\omega_{t_i}$. Ako nema serijske korelacije za ove dvije funkcije, tada je ispunjena pretpostavka o nezavisnosti.

[64] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 373.

### 3.3. Ekstremne vrijednosti strogo stacionarnih vremenskih serija

U prethodonom dijelu poglavlja, prikazan je postupak modeliranja i predviđanja ekstremnih vrijednosti vremenskih serija pod pretpostavkom da su opservacije nezavisne i da imaju istu raspodjelu. U praksi je mnogo češći slučaj postojanja serijske zavisnosti podataka koja utiče ne samo na veličinu ekstremnih vrijednosti, već i na kvalitativno ponašanje, u smislu njihovog grupisanja, odnosno stvaranja klastera. Drugim riječima, serijska zavisnost izaziva pojavljivanje velikih vrijednosti u parovima.[65]

Postoje dva pristupa analize ekstremnih vrijednosti vremenskih serija. Embrechts[66] je razvio metod da se izabere model vremenskih serija za cjelokupan proces, prilagodi podacima i onda se odredi njegovo ekstremno ponašanje, analitički ili simulacijom. Drugi pristup se odnosi na biranje modela za proces samo pri ekstremnim nivoima. Dobra strana ovih modela je što se izvode pod veoma malim brojem pretpostavki. Osnovni koncept čini *ekstremni indeks* koji omogućava stvaranje veze između strukture zavisnosti podataka i njihovog ekstremnog ponašanja.[67]

#### 3.3.1. Ekstremni indeks

Neka je $x_1, x_2, ...$ strogo stacionarni niz slučajnih promjenljivih sa marginalnom funkcijom raspodjele $F(x)$. Posmatrajmo slučaj $n$ opservacija $\{x_i | i = 1,...,n\}$, i neka je $x_{(n)} = \max\{x_i\}$. Postupak nalaženja nedegenerisane raspodjele ovako odabranih ekstremnih vrijednosti svodi se na nalaženje granične raspodjele od $\frac{x_{(n)} - \beta_n}{\alpha_n}$, gdje su konstante $\alpha_n > 0$, i $\beta_n \in R$. Ranije je razmatran isti problem, ali za slučaj kada su slučajne promjenljive nezavisne i jednako raspodijeljene, i takva raspodjela je bila oblika

[65] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., Teugels, J. (2004) Op. cit. str. 369.
[66] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997) Op. cit. str. 371-412.
[67] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 377.

jedne od raspodjela ekstremnih vrijednosti. Postavlja se pitanje šta se dešava u slučaju kada su slučajne promjenljive serijski zavisne? Ukratko, pod određenim uslovom, granična vrijednost maksimuma strogo stacionarnih vremenskih serija je takođe raspodjela ekstremnih vrijednosti. Dati uslov je formulisao Leadbetter 1974. godine i poznat je kao $D(u_n)$ uslov. Takođe, treba naglasiti da parametri koji se pridružuju graničnoj raspodjeli, nijesu isti kao u slučaju razmatranja nezavisnih i jednako raspodijeljenih slučajnih uzoraka, jer granična raspodjela zavisi od marginalne raspodjele osnovnih nizova. Za nezavisne i jednako raspodijeljene nizove $F(x)$ je marginalna raspodjela. Međutim, za stacionarne serije osnovni nizovi su blok maksimumi čija marginalna raspodjela nije $F(x)$, već zavisi od veličine blokova *k* i od intenziteta serijske zavisnosti niza $x_i$.

Pretpostavimo da serijska zavisnost stacionarnih serija $x_i$ opada brzo, tako da su $x_i$ i $x_{i+l}$ nezavisne za dovoljno veliko *l*. Sledeće treba podijeliti podatke na disjunktne blokove veličine *k*, i neka je $g = [n/k]$ najveći cijeli broj koji je manji od ili jednak datom razlomku. Poslednji, *(g+1)*-vi blok može da ima manje podataka od *k*. Neka je $x_{k,i}$ maksimalna vrijednost *i*-tog bloka. Tada važi da je

$$x_{(n)} = \max_{i=1,\dots,g+1} x_{k,i}. \tag{3.59}$$

Ako je veličina blokova *k* dovoljno velika, i blok maksimum $x_{k,i}$ se ne javlja blizu kraja *i*-tog bloka, tada su $x_{k,i}$ i $x_{k,i+1}$ dovoljno međusobno udaljeni i nezavisni pod pretpostavkom slabe zavisnosti velikog dometa.

Dalje, neka je $u_n$ niz pragova koji rastu po stopi za koju očekivani broj prekoračenja od $x_i$ ostaje konačan, odnosno važi da je

$$\limsup n[1 - F(u_n)] < \infty,$$

gdje je $F(\cdot)$ marginalna funkcija kumulativne raspodjele od $x_i$. Takođe, neka su, za svaki pozitivan cijeli broj $p$ i $q$, $i_\nu$ $(\nu = 1,...,p)$ i $j_t$ $(t = 1,...,q)$ proizvoljni cijeli brojevi za koje važi

$$1 \le i_1 < i_2 < ... < i_p < j_1 < ... < j_q \le n,$$

gdje je $j_i - i_p \ge \ell_n$, a $\ell_n$ predstavlja funkciju veličine uzorka $n$, za koju važi da $\ell_n / n \to 0$ kad $n \to \infty$. Sa $A_1 = \{i_1, i_2, ..., i_p\}$ i $A_2 = \{j_1, j_2, ..., j_q\}$ označićemo dva skupa vremenskih indeksa, čiji elementi su odvojeni sa najmanje $\ell_n$ vremenskih perioda.

**Uslov 3.1.** $D(u_n)$

Za svaki skup $A_1 = \{i_1, i_2, ..., i_p\}$ i $A_2 = \{j_1, j_2, ..., j_q\}$ uslov $D(u_n)$ je zadovoljen ako

$$\left| P(\max_{i \in A_1 \cup A_2} x_i \le u_n) - P(\max_{i \in A_1} x_i \le u_n) P(\max_{i \in A_2} x_i \le u_n) \right| \le \delta_{n,\ell_n}, \tag{3.60}$$

gdje $\delta_{n,\ell_n} \to 0$ kad $n \to \infty$.

Drugim riječima, uslov $D(u_n)$ govori da bilo koja dva događaja oblika $\{\max_{i \in A_1} x_i \le u_n\}$ i $\{\max_{i \in A_2} x_i \le u_n\}$ mogu postati asimptotski nezavisni kako veličina uzorka $n$ raste kada su podskupovi indeksa $A_1$ i $A_2$ udaljeni veličinom $\ell_n$. Dakle, ovaj uslov ograničava zavisnost velikog dometa između takvih događaja. Time se dolazi do sledećeg fundamentalnog rezultata.

**Teorema 3.5. (Leadbetter, 1974)**

Neka je $\{x_i | i = 1,...,n\}$ strogo stacionarna vremenska serija za koju postoje nizovi konstanti $\alpha_n > 0$, i $\beta_n \in R$, kao i nedegenerisana funkcija raspodjele $G$ za koju važi

$$P\left[\frac{x_{(n)}-\beta_n}{\alpha_n}\le x\right]\to_d G(x),\qquad n\to\infty,$$

gdje oznaka $\to_d$ predstavlja konvergenciju u raspodjeli. Ako $D(u_n)$ važi za $u_n=\alpha_n x+\beta_n$, za svako $x$ tako da je $G(x)>0$, tada je $G$ funkcija raspodjele ekstremnih vrijednosti.

Ranije je navedeno da zavisnost utiče na graničnu raspodjelu, tj. na marginalnu raspodjelu blok maksimuma $x_{k,i}$. Da bi se preciznije pokazao taj uticaj, neka $\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\}$ bude niz nezavisnih i jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih tako da je marginalna raspodjela od $\tilde{x}_i$ ista kao i za stacionarnu vremensku seriju $x_i$. Neka je $\tilde{x}_{(n)}$ maksimum u nizu $\{\tilde{x}_i\}$.

**Teorema 3.6. (Leadbetter, 1983)**

Ako postoje nizovi konstanti $\alpha_n>0$, i $\beta_n\in R$, i nedegenerisana funkcija raspodjele $\tilde{G}$ tako da važi

$$P\left[\frac{\tilde{x}_{(n)}-\beta_n}{\alpha_n}\le x\right]\to_d \tilde{G}(x),\qquad n\to\infty,$$

ako uslov $D(u_n)$ važi za $u_n=\alpha_n x+\beta_n$, za svako $x$ tako da je $\tilde{G}(x)>0$, i ako $P\left[(x_{(n)}-\beta_n)/\alpha_n\le x\right]$ konvergira za neko $x$, tada

$$P\left[\frac{x_{(n)}-\beta_n}{\alpha_n}\le x\right]\to_d G(x)=\tilde{G}^{\theta}(x),\qquad n\to\infty,$$

za neku konstantu $\theta\in(0,1]$.

Konstanta $\theta$ predstavlja *ekstremni indeks* i, izuzev u slučaju kada je $\theta = 1$, granične raspodjele nezavisnih i stacionarnih nizova se razlikuju. Ako je $\theta > 0$, G je raspodjela ekstremnih vrijednosti, ali sa različitim parametrima u odnosu na $\tilde{G}$.

Formalna definicija ekstremnog indeksa je sledeća: Neka je $\{x_i\}$ strogo stacionarna vremenska serija sa marginalnom funkcijom kumulativne raspodjele $F(x)$ i neka je $\theta$ nenegativan broj. Pretpostavimo da za svako $\tau > 0$ postoji niz pragova $u_n$ takvih da

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n[1 - F(u_n)] = \tau, \\ &\lim_{n\to\infty} P(x_{(n)} \le u_n) = \exp(-\theta\tau). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Tada je $\theta$ ekstremni indeks vremenske serije $\{x_i\}$. Sada ostaje da se definiše veza između parametara graničnih raspodjela za nezavisne stacionarne nizove.[68]

Ako je $\gamma \neq 0$, na osnovu (3.10) da je $\tilde{G}(x)$ uopštena raspodjela ekstremnih vrijednosti za koju važi

$$\tilde{G}(x) = \exp\left[-(1 + \gamma\frac{x-\beta}{\alpha})^{-1/\gamma}\right],$$

gdje je $\gamma(x-\beta)/\alpha > 0.$ Dalje, na osnovu Teoreme 3.6. je

[68] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 380.

$$G(x)=\tilde{G}^{\theta}(x)=\exp\left[-\theta(1+\gamma\frac{x-\beta}{\alpha})^{-1/\gamma}\right]=\exp\left[-(\frac{1}{\theta^{\gamma}}+\gamma\frac{x-\beta}{\alpha\theta^{\gamma}})^{-1/\gamma}\right]=$$

$$=\exp\left[-(\gamma\frac{\alpha/\gamma+x-\beta}{\alpha\theta^{\gamma}})^{-1/\gamma}\right]=\exp\left[-(1+\gamma\frac{x-\beta+\alpha/\gamma-\alpha\theta^{\gamma}/\gamma}{\alpha\theta^{\gamma}})^{-1/\gamma}\right]= \qquad (3.62)$$

$$=\exp\left[-(1+\gamma\frac{x-\left[\beta-\frac{\alpha}{\gamma}(1-\theta^{\gamma})\right]}{\alpha\theta^{\gamma}})^{-1/\gamma}\right]=\exp\left[-(1+\gamma_{*}\frac{x-\beta_{*}}{\alpha_{*}})^{-1/\gamma}\right],$$

odnosno veza između parametara je sledeća: $\gamma_{*}=\gamma,\ \alpha_{*}=\alpha\theta^{\gamma}$, i $\beta_{*}=\beta-\alpha(1-\theta^{\gamma})/\gamma.$ Dakle, za stacionarne vremenske serije koje zadovoljavaju uslov $D(u_n)$, granična raspodjela uzoračkog maksimuma je generalisana raspodjela ekstremnih vrijednosti sa parametrom oblika $\gamma$, koji je isti kao u slučaju nezavisnih i jednako raspodijeljenih nizova. Dakle, ekstremnim indeksom $\theta$ su pogođeni parametar lokacije i razmjere. Za slučaj kada je $\gamma=0$ može se istim pristupom doći do rezultata da je $\alpha_{*}=\alpha,$ i $\beta_{*}=\beta+\alpha\ln\theta.$

### 3.3.2. Ocjena ekstremnog indeksa

Koriste se različiti metodi za ocjenu ekstremnog indeksa $\theta$ za strogo stacionarne vremenske serije $\{x_i\}$. Među njima su najčešća dva metoda: metod blokova i metod rokova, koji se interpetriraju u nastavku rada.

#### 3.3.2.1. Metod blokova

Za dovoljno veliki uzorak dimezije *n*, iz definicije ekstremnog indeksa $\theta$ važi

$$P(x_{(n)}\le u_n)\approx P^{\theta}(\tilde{x}_{(n)}\le u_n)=\left[F(u_n)\right]^{n\theta},$$

pod uslovom da je $n[1-F(u_n)] \to \tau > 0$. Odavde slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln P(x_{(n)} \le u_n)}{n \ln F(u_n)} = \theta. \tag{3.63}$$

Dakle, treba ocijeniti ova dva izraza u razlomku, pošto njihove prave vrijednosti nijesu poznate. Imenilac razlomka se ocjenjuje kvantilom uzorka, što je sugerisano Glivenko-Cantelli teoremom[69]:

$$\hat{F}(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i \le u_n) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i > u_n) = 1 - \frac{N(u_n)}{n},$$

gdje je *I(C)*=1 ako iskaz *C* važi (u ovom slučaju iskaz C je relacija $x_i > u_n$), a inače je jednak nuli, a $N(u_n)$ je broj prekoračenja preko datog praga $u_n$ u uzorku. Veću poteškoću stvara ocjenjivanje izraza u brojiocu $P(x_{(n)} \le u_n)$, koji se može ocijeniti pomoću metode blok maksimuma. Neka je *k* pravilno izabrana veličina bloka u uzorku veličine *n*, i neka je $g = [n/k]$ najveći cijeli broj koji je manji od ili jednak datom razlomku. Zbog jednostavnosti će se ovdje pretpostaviti da je *n*=*gk*. Na osnovu (3.58) i uslova $D(u_n)$ je

$$P(x_{(n)} \le u_n) = P(\max_{1\le i\le g} x_{k,i} \le u_n) \approx [P(x_{k,i} \le u_n)]^g.$$

Na osnovu blok maksimuma ocjenjuje se vjerovatnoća $P(x_{k,i} \le u_n)$:

$$\hat{P}(x_{k,i} \le u_n) = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} I(x_{k,i} \le u_n) = 1 - \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} I(x_{k,i} > u_n) = 1 - \frac{G(u_n)}{g},$$

[69] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997) Op. cit. str. 419.

gdje $G(u_n)$ predstavlja broj blokova čiji maksimum premašuje prag $u_n$. Konačno, na osnovu ovih ocjena, dobija se

$$\hat{\theta}_b^{(1)} = \frac{g}{n}\frac{\ln[1-G(u_n)/g]}{\ln[1-N(u_n)/n]} = \frac{1}{k}\frac{\ln[1-G(u_n)/g]}{\ln[1-N(u_n)/n]}, \tag{3.64}$$

gdje $b$ u indeksu označava da se radi o ocjeni ekstremnog indeksa $\theta$ metodom blokova. Ako se iskoristi aproksimacija Tajlorovog proširenja argumenta dobija se druga ocjena:

$$\hat{\theta}_b^{(2)} = \frac{1}{k}\frac{G(u_n)/g}{N(u_n)/n} = \frac{G(u_n)}{N(u_n)}.$$

Ova ocjena može da se alternativno interpretira preko Poissonovog procesa tačaka, o čemu se detaljnije razmatra u radu Hsinga et al. (1988).[70] U nastavku slijedi metod rokova, kao alternativni metod za ocjenu ekstremnog indeksa $\theta$.

#### 3.3.2.2. Metod rokova

O'Brien[71] je 1987. godine dokazao, da pod određenim slabim mješovitim uslovom, važi

$$\lim_{n\to\infty} P(x_{(n)}^* \le u_n | x_1 > u_n) = \theta,$$

[70] Hsing, T., Hüsler, J., Leadbetter, M. R. (1988) On the exceedance point process for a stationary sequence. Probability Theory and Related Fields 78: 97-112.
[71] O'Brien, G. L. (1987) Extreme values for stationary and markov sequences. Annals of Probability 15: 281-291.

gdje je $x_{(n)}^{*} = \max_{2 \le i \le s} x_i$, a $s$ je funkcija veličine uzorka $n$ koja zadovoljava određene uslove, kao što je da $s \to \infty$, i $s/n \to 0$ kad $n \to \infty$. Na ovaj način $\theta$ se ocjenjuje kao uslovna vjerovatnoća, koja se bazira na *rokovima*:

$$\hat{\theta}_r^{(3)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} I(A_{i,n})}{\sum_{i=1}^{n} I(x_i > u_n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} I(A_{i,n})}{N(u_n)},$$

gdje su sve oznake kao i u prethodnom metodu, a $A_{i,n} = \{x_i > u_n, x_{i+1} \le u_n, ..., x_{i+k} \le u_n\}$. Dakle, $A_{i,n}$ predstavlja događaj da prekoračenje slijedi rok od $k$ opservacija ispod datog praga. Ocjena, zapisana u prilagođenom obliku, dalje je

$$\hat{\theta}_r^{(3)} \approx \frac{(n-k)^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} I(A_{i,n})}{n^{-1} N(u_n)}.$$

U literaturi postoje i druge ocjene ekstremnog indeksa $\theta$, o kojima se detaljnije može vidjeti kod Beirlanta et al. (2004).[72] Nakon ocijenjene vrijednosti ekstremnog indeksa $\theta$ za strogo stacionarne vremenske serije, može se izračunati parametar vrijednosti pri riziku za stacionarne vremenske serije, a obrazac za računanje je predstavljen u narednom dijelu.

### 3.3.3. Parametar VaR za stacionarne vremenske serije

Na osnovu druge teoreme Leadbetter-a (teorema 3.6), i veze između granične raspodjele stacionarnih vremenskih serija sa jedne strane, i nezavisnih i jednako raspodijeljenih nizova, s druge strane, može se izračunati parametar VaR za finansijsku poziciju u slučaju kada njeni logaritmovani prinosi formiraju stacionarnu vremensku seriju. Naime,

[72] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., Teugels, J. (2004) Op. cit.

na osnovu vjerovatnoće $P(x_{(n)} \le u_n) \approx [F(x)]^{n\theta}$, (1-*p*)-ti kvantil od *F(x)* predstavlja $(1-p)^{n\theta}$-ti kvantil granične raspodjele ekstremnih vrijednosti od $x_{(n)}$. Dakle:

$$VaR = \begin{cases} \beta_n - \dfrac{\alpha_n}{\gamma_n}\left\{1 - [-n\theta \ln(1-p)]^{-\gamma_n}\right\} & \gamma_n \neq 0, \\ \beta_n - \alpha_n \ln[-n\theta \ln(1-p)] & \gamma_n = 0, \end{cases} \tag{3.65}$$

gdje *n* označava dužinu podperioda, odnosno bloka.

Teorija ekstremnih vrijednosti omogućava bolje modeliranje i prognoziranje ekstremnih događaja u odnosu na ostale metodologije VaR-a, jer koristi samo podatke serije koji se, na određeni način, smatraju ekstremom. Naime, metod blok maksimuma koristi maksimalne vrijednosti određenih podperioda koji se nazivaju blokovi, dok, sa druge strane, metod vrhova iznad datog praga koristi sve podatke koji premašuju određeni nivo (visoki prag). Primjena ovih metoda na slučaj jedne promjenljive daje odlične rezultate, ali korišćenje teorije ekstremnih vrijednosti u slučaju kvantifikovanja parametra vrijednosti pri riziku određenog portfolija (više akcija) pokazuje izvjesna ograničenja ove teorije. Osnovni problem koji se javlja u tom slučaju je definisanje ekstremnih vrijednosti vektora sa *n* dimenzija ($n > 1$).[73]

Longin (1999), za rješavanje ovog problema predlaže ocjenjivanje marginalne raspodjele ekstrema za svaku poziciju, i ocjenu pojedinačnih parametara vrijednosti pri riziku kao *p*-kvantila za svaku promjenljivu u modelu, a parametar vrijednosti pri riziku za portfolio sa *n* dimenzija se računa na osnovu obrasca (2.25), za koji je još neophodno izračunati koeficijente korelacije između pojedinačnih pozicija.

Međutim, zajednička raspodjela marginalnih raspodjela ekstremnih vrijednosti nije uvijek raspodjela ekstremnih vrijednosti zajedničke pozicije. Drugim riječima, ekstremna

[73] Embrechts, P., de Haan, L., Huang, X. (1999) Modelling Multivariate Extremes. ETH preprint. (http://www.math.ethz.ch/~embrechts).

kretanja u promjenama logaritmovanih vrijednosti cijena različitih sredstava iz portfolija, ne predstavljaju uvijek ekstremna kretanja u vrijednosti ukupnog portfolija. To zavisi od strukture portfolija i veze između različitih sredstava (korelacije između pojedinih pozicija).[74]

Sledeće poglavlje disertacije je posvećeno rješavanju ovog problema, i proširenju primjene teorije ekstremnih vrijednosti na multivarijantni slučaj.

[74] Embrechts, P., (2000) Extreme Value Theory: Potential and Limitations as an Integrated Risk Management Tool. ETH preprint (http://www.math.ethz.ch/~embrechts).

# IV MULTIVARIJACIONO UOPŠTENJE TEORIJE EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI

Teorija ekstremnih vrijednosti se primjenjuje sa velikim uspjehom na univarijantne vremenske serije. Međutim, u praksi je potrebno analizirati istovremeno serije više promjenljivih. Treba imati u vidu da teorija ekstremnih vrijednosti zahtijeva da ekstremne vrijednosti budu nezavisne i da imaju jednaku raspodjelu, pa se stoga ne može primjenjivati direktno na prinose finansijskih sredstava, jer finansijske vremenske serije najčešće sadrže u svojim podacima autokorelaciju i heteroskedastičnost.

Takođe, kao što je u prethodnom poglavlju pokazano, ocjene parametara uopštene Pareto raspodjele i uopštene raspodjele ekstremnih vrijednosti zavise od broja ekstremnih podataka koji se koriste u konkretnom slučaju. Kod primjene metoda vrhova iznad datog praga, kao što je već istaknuto, izbor visokog praga treba da bude dovoljan da zadovolji uslov za primjenu uopštene Pareto raspodjele, dok sa druge strane, treba da ostavi dovoljan broj podataka kako bi ocjena parametara imala statističku značajnost.

Ako se razmatra portfolio od više akcija, postavlja se pitanje kako u tom slučaju primijeniti teoriju ekstremnih vrijednosti. Zbog mogućeg postojanja međusobne korelacije, neophodno je konstruisati skup međusobno nekorelisanih slučajnih promjenljivih. Sledeća poteškoća u analizi više promjenljivih je veliki broj parametara za ocjenjivanje, a tada treba voditi računa i o konzistentnosti ocjena putem pojedinih metoda. Naime, sa velikim brojem parametara funkcija vjerodostojnosti postaje ravna, i dolazi do problema konvergencije njihovih ocjena prilikom primjene ovog metoda.[75] U ovom dijelu rada se objašnjava kako prevazići te probleme i omogućiti proširenje pristupa teorije ekstremnih vrijednosti na višedimenzionu analizu, što omogućava njenu primjenu u računanju parametara vrijednosti pri riziku, kao i ostalih mjera rizika, za slučaj portfolija sa više hartija od vrijednosti.

[75] Alexander, C. (2001b) A Primer on the Orthogonal GARCH Model. Available at http://www.ismacentre.rdg.ac.uk. str. 18.

## 4.1. Ortogonalizacija – Pristup analize glavnih komponenata i Cholesky dekompozicija

Analiza glavnih komponenata je veoma popularna metoda koja se sve više koristi u analizi više promjenljivih, jer tada treba razmotriti njihovu kovarijansu, odnosno korelacionu strukturu. Ortogonalni GARCH metod se zasniva na ovom pristupu.

Neka su kolone matrice *X* označene sa $x_1,...,x_k$, tako da je $X'X$ simetrična matrica tipa $k \times k$, a čine je koeficijenti korelacije između promjenljivih u *X*, pa zato sadrži jedinice na glavnoj dijagonali. Svaka glavna komponenta je linearna kombinacija ovih kolona, gdje su ponderi izabani iz skupa svojstvenih vektora[76] matrice $X'X$ tako da važi[77]:

1) Prva glavna komponenta objašnjava maksimalni iznos ukupne varijacije u *X*, druga glavna komponenta objašnjava maksimalni iznos preostale varijacije, itd.
2) Glavne komponente nijesu u korelaciji – međusobno su ortogonalne.

Neka je $\Lambda$ dijagonalna matrica karakterističnih vrijednosti matrice $X'X$:

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), \tag{4.1}$$

gdje su $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0.$ Dakle, matrica $\Lambda$ je pozitivno definitna. Neka je *W* matrica svojstvenih vektora matrice $X'X$. Tada po spektralnoj teoriji linearne algebre važi (vidjeti fusnotu 76):

---

[76] Ako se *nenulti vektor x*, linearnom transformacijom sa matricom *A* transformiše u sebi *kolinearan vektor*

$$Ax = \lambda x$$

onda on predstavlja *svojstveni, sopstveni ili karakteristični vektor* matrice *A*. Skalar $\lambda$ predstavlja *svojstvenu, sopstvenu ili karakterističnu vrijednost* matrice *A*.

[77] Alexander, C. (2001b) Op.cit. str. 6.

$$X'XW = W\Lambda. \tag{4.2}$$

S obzirom na redosljed svojstvenih vrijednosti ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0$) u matrici $\Lambda$, kolone u matrici *W* treba poređati prema odgovarajućoj veličini svojstvene vrijednosti. Naime, ako je $W = (w_{ij}), \quad i, j = 1,...,k,$ tada je *m*-ta kolona matrice *W*, označena sa $w_m = (w_{1m},..., w_{km})'$, $k \times 1$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_m$. Onda se *m*-ta glavna komponenta definiše sa

$$p_m = w_{1m}x_1 + w_{2m}x_2 + ... + w_{km}x_k, \tag{4.3}$$

gdje je $x_i$ *i*-ta kolona matrice *X*, ili u matričnom zapisu

$$P = XW, \tag{4.4}$$

gdje je *P* matrica glavnih komponenata, čija je osobina da su njene kolone međusobno ortogonalne. To se može pokazati na sledeći način:

$$P'P = (XW)'(XW) = W'X'XW = W'W\Lambda = \Lambda.$$

Pošto je matrica *W* ortogonalna, tada je *W'W=I* , a s obzirom da je $\Lambda$ dijagonalna matrica, zaključuje se da su kolone matrice *P* međusobno nekorelisane. Takođe, na osnovu osobine ortogonalnosti važi da je $W' = W^{-1}$. Konačno, na osnovu relacije (4.4) važi $X = PW^{-1} = PW'$, odnosno:

$$X_i = w_{i1}P_1 + w_{i2}P_2 + ... + w_{ik}P_k. \tag{4.5}$$

Dakle, svaki vektor matrice $X$ je linearna kombinacija glavnih komponenata. Učešće u ukupnoj varijaciji matrice $X$, koje je objašnjeno $m$-tom glavnom komponentom određuje se kao količnik $\lambda_m / \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Na osnovu toga, ako nisko rangirana komponenta ne pridonosi mnogo ukupno objašnjenoj varijaciji, što je često slučaj kod finansijskih vremenskih serija, analiza se može svesti na manji broj od $m$ komponenti $(m < k)$.[78] Drugim riječima, prvih $m$ komponenti objašnjava udio od $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i / \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ objašnjenog varijabiliteta. Tada se $W$ matrica svodi na matricu $W_m$ tipa $k \times m$, koja obuhvata prvih $m$ normalizovanih svojstvenih vrijednosti, matrica $P$ je istog tipa i označava se sa $P_m$, a $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_m)$, je dijagonalna matrica prvih $m$ svojstvenih vrijednosti.

Takođe, u literaturi se koristi i *Cholesky dekompozicija* kovarijacione varijanse, koja predstavlja ortogonalnu transformaciju, čija je znatna prednost u tome da je funkcija vjerodostojnosti koja se na taj način dobije, jednostavna za primjenu. Ovaj pristup ima prednost u ocjenjivanju jer ne zahtijeva ograničenja parametara za pozitivno definitnu kovarijacionu varijansu.[79]

Ako je kovarijaciona varijansa $\Sigma_t$ šokova ili inovacija $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, ..., \varepsilon_{kt})'$, pozitivno definitna, Cholesky dekompozicija se sastoji u sledećem: tada postoji donje-trougaona matrica $L_t$ čija dijagonala sadrži jedinice, i dijagonalna matrica $G_t$ sa pozitivnim elementima na dijagonali tako da važi

$$\Sigma_t = L_t G_t L_t'. \tag{4.6}$$

[78]Božović, M. (2013) Portfolio Tail Risk: An Efficient Multivariate Extreme Value Theory Approach. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2313148 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2313148, str. 16.
[79] Tsay, R. S. (2010) Op.cit. str. 517.

Dekompozicija će biti prikazana na dvodimenzionom slučaju (dvije promjenljive).[80] Tada su navedene matrice date sa:

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{21,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} \end{bmatrix}, \quad L_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{21,t} & 1 \end{bmatrix}, \quad G_t = \begin{bmatrix} g_{11,t} & 0 \\ o & g_{22,t} \end{bmatrix},$$

gdje su, shodno prethodnoj definiciji, $g_{ii,t} > 0, \quad i = 1,2.$ Ako se navedena dekompozicija, data sa (4.6), primijeni, množenjem matrica dobija se

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{21,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11,t} & q_{21,t} g_{11,t} \\ q_{21,t} g_{11,t} & g_{22,t} + q_{21,t}^2 g_{11,t} \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$\sigma_{11,t} = g_{11,t}, \quad \sigma_{21,t} = q_{21,t} g_{11,t}, \quad \sigma_{22,t} = g_{22,t} + q_{21,t}^2 g_{11,t}. \tag{4.7}$$

Odavde se elementi matrica $L_t$ i $G_t$ izražavaju kao

$$g_{11,t} = \sigma_{11,t}, \quad q_{21,t} = \frac{\sigma_{21,t}}{\sigma_{11,t}}, \quad g_{22,t} = \sigma_{22,t} - \frac{q_{21,t}^2}{\sigma_{11,t}}. \tag{4.8}$$

Dalje, ako se razmotri prost model regresije

$$a_{2t} = \beta a_{1t} + b_{2t}, \tag{4.9}$$

gdje je $b_{2t}$ član greške, na osnovu metoda najmanjih kvadrata je

[80] Tsay, R. S. (2010) Op.cit. str. 518.

$$\beta = \frac{Cov(a_{1t}, a_{2t})}{Var(a_{1t})} = \frac{\sigma_{21,t}}{\sigma_{11,t}} = q_{21,t},$$

$$Var(b_{2t}) = Var(a_{2t}) - \beta^2 Var(a_{1t}) = \sigma_{22,t} - \frac{q_{21,t}^2}{\sigma_{11,t}} = g_{22,t}.$$

Kao što je već navedeno, $\sigma_{11,t} = g_{11,t}$, a član $b_{2t}$ nije korelisan sa regresorom $a_{1t}$.

Dakle, konačno se dekompozicija kovarijacione matrice svodi na ortogonalnu transformaciju od $a_t$ do $b_t = (b_{1t}, b_{2t})'$ tako da je

$$\begin{aligned} b_{1t} &= a_{1t} \\ b_{2t} &= a_{2t} - q_{21,t} a_{1t}, \end{aligned}$$

a $q_{21,t} = \beta$, koje se dobija iz linearne regresije (4.9), dok dijagonalni elementi matrice $G_t$ daju vrijednosti varijansi $b_t = (b_{1t}, b_{2t})'$. Naime, prvi njen dijagonalni element je varijansa regresora $a_{1t} = b_{1t}$, a drugi dijagonalni element je varijansa člana $b_{2t}$, odnosno rezidualna varijansa linearne regresije date sa (4.9).

Uopšteno, Cholesky dekompozicija vrši ortogonalnu transformaciju od $a_t$ do $b_t$, gdje je $b_{1t} = a_{1t}$, a $b_{it}$, za $1 < i \le k$ se definiše kao

$$a_{it} = q_{i1,t} b_{1t} + q_{i2,t} b_{2t} + \ldots + q_{(i-1),t} b_{(i-1)t} + b_{it}, \tag{4.10}$$

gdje je $q_{ij,t}$ član matrice $L_t$ iz i-te vrste i j-te kolone ($1 \le j < i$).

Transformacija se može zapisati i kao

$$b_t = L_t^{-1} a_t, \text{ ili } a_t = L_t b_t, \tag{4.11}$$

a odavde upravo i slijedi objašnjenje i interpretacija elemenata matrice $G_t$ kao kovarijacione matrice od $b_t = (b_{1t}, b_{2t})'$. Naime,

$$Cov(z_t) = L_t^{-1}\Sigma_t (L_t^{-1})' = G_t .$$

Ako je uslovna raspodjela članova $a_t$ na osnovu raspoloživih podataka multivarijantno normalna $N(0,\Sigma_t)$, tada je uslovna raspodjela transformisane serije $b_t$ multivarijantno normalna $N(0,G_t)$, i funkcija logaritmovane vjerodostojnosti podataka postaje jednostavna.

Upotreba Cholesky dekompozicije za reparametrizaciju kovarijacione varijanse $\Sigma_t$ ima nekoliko prednosti. Prije svega, varijansa $\Sigma_t$ je pozitivno definitna matrica ako je $g_{ii,t} > 0, \quad i = 1,2$. Dalje, pozitivno definitno ograničenje se može jednostavno izvesti modeliranjem logaritmovanih vrijednosti članova $g_{ii,t}$. Konačno, rezultati ove dekompozicije predstavljaju koeficijente i varijanse višestrukih linearnih regresija koje nastaju u slučaju ortogonalnih reziduala prinosa.

## 4.2. Filtracija serijske korelacije i grupisanja uslovne varijanse

Kada se izvrši ortogonalizacija, posmatrane serije su međusobno nekorelisane. Neophodno je, takođe, otkloniti serijsku korelaciju i klastere volatilnosti kako bi se dobile ortogonalne nekorelisane serije koje imaju jednako raspodijeljene uslovne reziduale.

### 4.2.1. ARMA proces

Opšti ARMA(*r,m*) model za jednu seriju je

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{r} \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^{m} \theta_i a_{t-i}, \tag{4.12}$$

gdje je $\{a_t\}$ proces bijelog šuma, a $r$ i $m$ su nenegativni cijeli brojevi. Ako se posmatra više sredstava (npr. akcija i sl.) i neka za svako sredstvo $i = 1,2,...,k$, logaritmovani prinos u vremenu $t$ prati ARMA($r,m$) proces. Tada su $r_t$ i $\phi_0$ odgovarajući vektori, dok su $\phi_i$ i $\theta_i$ dijagonalne matrice tipa $k \times k$, sa koeficijentima ARMA modela.

Za vektor reziduala $a_t = (a_{t,1},...,a_{t,k})'$, ako raspolažemo podacima do vremenskog trenutka $t$-1, važi sledeće:

$$E(a_t | \Omega_{t-1}) = E(\varepsilon_t) = [0,0,...,0]' = 0, \tag{4.13}$$

$$Var(a_t | \Omega_{t-1}) = Var(a_t a_t' | \Omega_{t-1}) = \Sigma_t. \tag{4.14}$$

Matrica $\Sigma_t$ je pozitivno definitna, i računa se na osnovu prošlih reziduala do vremenskog trenutka $t$-1, kao što je već istaknuto.

### 4.2.2. GARCH model za modeliranje uslovne varijanse

Uslovna varijansa kod prinosa finansijskih sredstava ima osobinu grupisanja, odnosno, pojavljivanja u klasterima, kao što je naglašeno u prvom poglavlju gdje je dat osvrt na osnovne pojmove finansijskih vremenskih serija, kao i njihove osnovne osobine. GARCH model za obuhvatanje grupisanja uslovne varijanse može da se primjenjuje na veliki broj modela, od jednodimenzionih modela volatilnosti do višedimenzionih modela. Ovdje je objašnjen višedimenzioni GARCH model. Radi jednostavnosti, neka je koeficijent korelacije konstantan, odnosno, ne mijenja se tokom vremena - $\rho_{21,t} = \rho_{21}$ -

što je Bollerslev 1990. uveo.[81] Tada se model volatilnosti GARCH(1,1) formira na sledeći način:

$$\Xi_t^* = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \Xi_{t-1}^*, \tag{4.15}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11,t} \\ \sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1}^2 \\ a_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} \\ \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

gdje je $\Xi_t^* = (\sigma_{11,t}, \sigma_{22,t})'$, $\alpha_0$ je dvodimenzioni pozitivni vektor ($\alpha_{i0} > 0, \forall i \in \{1,2\}$), $a_{t-1}^2 = (a_{1,t-1}^2, a_{2,t-1}^2)'$, a matrice $\alpha_1$ i $\beta_1$ su nenegativno definitne tipa $2 \times 2$.

Kao što je već rečeno, svaki GARCH model se može alternativno napisati u vidu ARMA modela. Ako se definiše $\eta_t = a_t^2 - \Xi_t^*$, i uvrsti u (4.16) dobija se sledeći ARMA(1,1) model za $a_t^2$ proces (dvodimenziono uopštenje):

$$a_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) a_{t-1}^2 + \eta_t - \beta_1 \eta_{t-1}. \tag{4.17}$$

Jedna od osobina GARCH(1,1) modela je ta da je simetričan u ponašanju volatilnosti – drugim riječima, volatilnost jednako utiče i na pozitivne i na negativne šokove. Međutim, poznato je da je mnogo veći uticaj negativnih vijesti na uslovnu varijansu, što se i empirijski potvrđuje, pa je stoga bolje imati u vidu datu činjenicu prilikom modeliranja volatilnosti. Jedan od načina je da uslovni reziduali imaju raspodjelu kao što je Studentova t raspodjela. Drugi način je da se koristi neki od modela volatilnosti koji asimetrično posmatraju uticaj negativnih i pozitivnih šokova na volatilnost. Takav je

[81] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 522.

recimo E-GARCH model, kao i GJR-GARCH model, koji se tako zove po autorima Glostenu, Jagannathanu i Runkle-u, a koji se ovdje izlaže.[82]

GJR-GARCH model, dakle, polazi od pretpostavke da je vjerovatnije da će se velike negativne promjene javljati u klasterima, nego što će to biti slučaj za pozitivne. Postoji sličnost ovog modela sa T-GARCH modelom, s tim što se T-GARCH odnosi na proces standardne devijacije, umjesto varijanse. Višedimenzioni GJR-GARCH model(*p,q*) se definiše kao[83]

$$\Sigma_t = \Phi + \sum_{i=1}^{p} B_i A_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \Theta_i I_{t-i} A_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} C_i \Sigma_{t-i}, \tag{4.18}$$

gdje su $\Phi, B_1, ..., B_p, \Theta_1, ..., \Theta_p, C_1, ..., C_q$ pozitivno semidefinitne matrice tipa $k \times k$, $A_t = a_t a_t'$, a $I_t$ je dijagonalna matrica istog tipa sa elementima na dijagonali

$$I_t = \begin{cases} a_{t,i} & a_{t,i} < 0, \\ 0 & a_{t,i} \geq 0. \end{cases}$$

Bezuslovna kovarijaciona matrica data je sa

$$\Sigma_t = (1_k - \sum_{i=1}^{p} (B_i + \frac{1}{2}\Theta_i) - \sum_{i=1}^{q} C_i)^{-1} \Phi.$$

Odavde proizilazi da ako je matrica $1_k - \sum_{i=1}^{p} (B_i + \frac{1}{2}\Theta_i) - \sum_{i=1}^{q} C_i$ pozitivno definitna, tada je kovarijansa GJR-GARCH(*p,q*) procesa stacionarna.[84]

---

[82] Glosten, L. R., Jagannathan, R., Runkle, D. E. (1993) On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. The Journal of Finance. Vol. 48, No. 5. str. 1779–1801.
[83] Božović, M. (2013) Op. cit. Str. 19.
[84] Ibid, str. 20.

Dakle, kada se primijeni model na ortogonalnu bazu glavnih komponenata, dobijemo *m* ili *k* skalarnih jednačina za svaku glavnu komponentu, odnosno u matričnom obliku:

$$\hat{r}_t = \hat{\phi}_0 + \sum_{i=1}^{r} \hat{\phi}_i \hat{r}_{t-i} + b_t - \sum_{i=1}^{m} \hat{\theta}_i b_{t-i}, \tag{4.19}$$

i

$$\hat{\Sigma}_t = \hat{\Phi} + \sum_{i=1}^{p} \hat{B}_i \hat{A}_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \hat{\Theta}_i \hat{I}_{t-i} \hat{A}_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \hat{C}_i \hat{\Sigma}_{t-i}, \tag{4.20}$$

gdje je $\hat{r}_t = L_t^{-1} r_t$, $\hat{\phi}_0 = L_t^{-1} \phi_0$, a za svaku matricu $M$ važi da je $\hat{M} = L^{-1} M (L^{-1})'$. Npr. $\hat{A}_t = L^{-1} A_t (L^{-1})' = b_t b_t'$, a

$$\hat{I}_t = L^{-1} I_t (L^{-1})' = \begin{cases} b_{t,i} & b_{t,i} < 0, \\ 0 & b_{t,i} \geq 0. \end{cases}$$

S obzirom da je, na osnovu (4.13), $E(b_t | \Omega_{t-1}) = L^{-1} E(a_t) = 0$, a za kovarijacionu matricu važi da je $\hat{\Sigma}_t = L^{-1} \Sigma_t (L^{-1})'$, zaključuje se da je matrica dijagonalna, jer su glavne komponente međusobno ortogonalne.[85]

Kada se parametri ocijene, koristi se inverzna transformacija

$$\Sigma_t = L \hat{\Sigma}_t L', \tag{4.21}$$

[85] Alexander, C. (2001a) Mastering Risk, Volume 2. London, Financial Times Prentice Hall. str 21-38.

da bi se kovarijacione matrice vratile na originalne, početne vrijednosti. To omogućava da ocijenimo parametar vrijednosti pri riziku i očekivani gubitak za višedimenzioni okvir, odnosno za određeni portfolio.

## 4.3. Ocjena VaR-a i ES-a (očekivanog gubitka)

Parametri GARCH modela se mogu ocijeniti pomoću više metoda. Obično se koristi, kao što je do sada u jednodimenzionom modelu prikazivano, metod maksimalne vjerodostojnosti. Međutim, već je navedeno da neki autori smatraju da se u slučaju rada sa većim brojem promjenljivih, pored problema velikog broja parametara koje treba ocijeniti, dovodi u pitanje konzistentnost ocjena pomoću ovih metoda. Isto tako, neophodno je voditi računa da su ispunjene pretpostavke o uslovnim raspodjelama, odnosno neophodna je kompletna specifikacija modela kao i njegove raspodjele vjerovatnoće. Međutim, uopšteni metod momenata ne zahtijeva takve pretpostavke, pa se opisuje u nastavku rada.

### 4.3.1. Ocjena parametara GARCH modela po uopštenom metodu momenata

Može se reći da je uopšteni metod momenata razvio Lars Peter Hansen[86] u svom radu objavljenom 1982. godine, iako osnovna ideja metoda datira iz kasnih pedesetih godina prošlog vijeka, i nalazi se u radu Denisa Sargana[87]. Ovaj metod zahtijeva specifikaciju skupa uslova momenata koje bi model trebalo da zadovolji. Ovi uslovi momenata su određene funkcije parametara modela, kao npr. da je njihova očekivana vrijednost jednaka nuli. Tada se ovim metodom minimizira mjera prosjeka uzoraka uslova momenata.

[86] Hansen, L. P. (1982) Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. Econometrica, 50, 1029-1054.
[87] Sargan, D. (1958) The Estimation of Economic Relationships Using Instrumental Variables. Econometrica, 26, 393-415.

Ako raspolažemo sa T nezavisnih i jednako raspodijeljenih opservacija, $\{x_t\}, \quad t = 1,2,...,T$, gdje je svaka od opservacija $x_t$ $k$-dimenziona slučajna promjenljiva, najprije se definiše funkcija vrijednosti vektora $g(x_t, \psi)$, tako da je

$$m(\psi) = E[g(x_t, \psi)] = 0.$$

Osnovna ideja uopštenog metoda momenata je da se teorijska očekivana vrijednost mijenja sa empirijskom vrijednosti, prosjekom uzorka:

$$\hat{m}(\psi) = \hat{E}[g(x_t, \psi)] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g(x_t, \psi).$$

Uopšteni metod momenata traži takvu vrijednost $\hat{\psi}$ kojom se minimizira $\hat{m}(\hat{\psi})$, što matematički znači da se minimizira odgovarajuća mjera od $\hat{m}(\hat{\psi})$, koja se označava sa $\|m\|$, a predstavlja udaljenost između vrijednosti $m$ i 0. Osobine rezultujuće ocjene zavise od izbora funkcije mjere, a familija mjera se definiše kao

$$\|\hat{m}(\psi)\|_W^2 = \hat{m}(\psi)' W \hat{m}(\psi),$$

gdje je ponderisana matrica $W$ konzistentna ocjena inverzne asimptotske kovarijacione matrice. Ocjena je tada

$$\hat{\psi} = \arg\min_{\psi} m(\psi)' W m(\psi). \tag{4.22}$$

U skladu sa ortogonalizacijom, neka je za konkretno $t$ i svaku glavnu komponentu $i$[88]

[88] Skoglund, J. (2001) A Simple Efficient Estimator of GARCH Models. Working Paper Series in Economics and Finance. Stockholm School of Economics Str. 3.

$$e_t = \begin{bmatrix} b_t & b_t^2 - \hat{\Sigma}_t \end{bmatrix}',$$

i neka je funkcija

$$g_t(\psi) = F_t'(\psi) e_t,$$

gdje je $F_t$ funkcija instrumentalne promjenljive. Efikasan izbor te funkcije i ponderisane matrice $W$ je

$$F_t(\psi) = \Sigma_t^{-1} J_t(\psi),$$

gdje je $\Sigma_t = \mathrm{var}(e_t | \Omega_{t-1})$, a

$$J_t(\psi) = \frac{\partial e_t}{\partial \psi'}$$

je Jakobijanova matrica, i[89]

$$W = \frac{1}{T} \sum g(\psi) g(\psi)'.$$

Da bi se dobile inicijalne ocjene skupa parametara $\psi$, može se koristiti metod kvazi-maksimalne vjerodostojnosti, kako bi ocjene bile konzistentne. Naravno, pretpostavka o uslovnoj normalnosti reziduala se podrazumijeva prilikom navedenog ocjenjivanja.

[89] Newey, W. K., McFadden, D. (1994) Large Sample Estimation and Hypothesis Testing. Chapter 36, p. 2111-2245 of: Engle, R. F., McFadden, R. (eds), Handbook of Econometrics, vol. 4.

## 4.4. Prognoziranje parametara

Prognoza vektora tranformisanih logaritmovanih prinosa za naredni vremenski trenutak, dobija se na osnovu (4.19), kao

$$E(\hat{r}_{t+1}|\Omega_{t-1}) = \hat{\phi}_0 + \sum_{i=1}^{r} \hat{\phi}_i \hat{r}_{t-i+1}, \tag{4.23}$$

a za duži vremenski period *h* je

$$\begin{aligned} E(\hat{r}_{t+h}|\Omega_t) &= \hat{\phi}_0 + \sum_{i=1}^{r} \hat{\phi}_i E(\hat{r}_{t-i+h}|\Omega_t) \\ &= \hat{\phi}_0 + \sum_{i=1}^{h} \hat{\phi}_i \hat{r}_{t-i+h} + \sum_{i=h+1}^{r} \hat{\phi}_i E(\hat{r}_{t-i+h}|\Omega_t), \end{aligned} \tag{4.24}$$

s obzirom da su glavne komponente $b_t$ nezavisne.

Što se tiče volatilnosti, na osnovu (4.20) iz postavljenog modela, prognoza uslovne varijanse za jedan vremenski trenutak unaprijed, na bazi glavnih komponenata je

$$E(\hat{\Sigma}_{t+1}|\Omega_t) = \hat{\Sigma}_{t+1} = \hat{\Phi} + \sum_{i=1}^{p} \hat{B}_i \hat{A}_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{p} \hat{\Theta}_i \hat{I}_{t-i+1} \hat{A}_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{q} \hat{C}_i \hat{\Sigma}_{t-i+1}.$$

Dalje, zamjenom poznatih matrica zaključno sa vremenskim trenutkom *t*, može se dobiti prognoza za duži vremenski period *h*. Npr., za trenutak *t*+2[90] iznosi

$$E(\hat{\Sigma}_{t+2}|\Omega_t) = \hat{\Sigma}_{t+1} = \hat{\Phi} + \sum_{i=1}^{p} (\hat{B}_i + \frac{1}{2}\hat{\Theta}_i)\hat{\Sigma}_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{q} \hat{C}_i \hat{\Sigma}_{t-i+1}.$$

[90] Božović, M. (2013) Op. cit. Str. 14.

Primjenom inverzne transformacije (4.21) dobija se prognoza u skladu sa originalnim vrijednostima logaritmovanih prinosa.

Konačno, prognoza vrijednosti intervala povjerenja za i-tu glavnu komponentu za period *h* je

$$\left[b_{t+h,i}^{-}, b_{t+h,i}^{+}\right] = \left[F_i^{-1}(q_-)\sqrt{\hat{\Sigma}_{t+h,i}}, F_i^{-1}(q_+)\sqrt{\hat{\Sigma}_{t+h,i}}\right], \tag{4.25}$$

gdje je $F_i^{-1}$ inverzna funkcija vjerovatnoće jedne promjenljive, koju imaju slučajne promjenljive $\{r_t\}, \quad t = 1,2,...,T$, a može se izračunati i preko inverzije (3.50).

### 4.5. Ocjenjivanje multivarijantnih parametara VaR-a i ES-a

Konačno, treba izračunati parametar vrijednosti pri riziku i očekivani gubitak portfolija. Miloš Božović u svom radu[91] daje sledeći obrazac za računanje VaR-a u opštem obliku za vremenski horizont *h*:

$$VaR_{q\pm} = a'L\left[E(\hat{r}_{t+h}|\Omega_t) + b_{t+h}^{\pm}\right], \tag{4.26}$$

Očekivani gubitak portfolija za vremenski horizont h je:

$$ES_{q+} = a'L\tilde{b}_{t+h}^{\pm}, \tag{4.27}$$

gdje je, u skladu sa (4.25)

[91] Božović, M. (2013) Op. cit. Str. 15.

$$\left[\tilde{b}^{-}_{t+h,i}, \tilde{b}^{+}_{t+h,i}\right] = \left[\tilde{F}_i^{-1}(q_-)\sqrt{\hat{\Sigma}_{t+h,i}}, \tilde{F}_i^{-1}(q_+)\sqrt{\hat{\Sigma}_{t+h,i}}\right],$$

a

$$\tilde{F}_i^{-1}(q_\pm) = \frac{1}{1-\gamma_\pm}\left[F_i^{-1}(q_\pm) \pm \psi(u)_\pm - \gamma_\pm u_\pm\right].$$

Ova efikasna procedura daje ocjenu parametara vrijednosti pri riziku i očekivanog gubitka na osnovu multivarijacionog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti. Ovaj metod se zasniva na odvojenim ocjenama univarijantnog modela teorije ekstremnih vrijednosti. Takav model se primjenjuje na niz ortogonalnih uslovnih reziduala iz zajedničke serije prinosa. Oni se mogu ocijeniti ortogonalizacijom – primjenom glavnih komponenti. Takođe, alternativno se za ortogonalizaciju može primijeniti i Cholesky dekompozicija, ili neki od GARCH modela (ortogonalni GARCH ili uopšteni ortogonalni GARCH model).

Dalje, autokorelacija, heteroskedastičnost i asimetrija iz originalnih serija prinosa se mogu otkloniti ARMA procesom za uslovnu očekivanu vrijednost prinosa i upotrebom GARCH modela (najbolje asimetričnog) za uslovnu varijansu ovako ocijenjenih reziduala. Na taj način se dobija niz nezavisnih slučajnih promjenljivih koje imaju istu raspodjelu, što je uslov za primjenu teorije ekstremne vrijednosti. Repovi univarijantnih raspodjela se modeliraju uopštenom Pareto raspodjelom modela vrhova iznad datog praga.

Navedeni model se dalje može osloboditi dodatnih pretpostavki o raspodjeli jer se ocjena parametara ARMA-GARCH modela može izvesti pomoću uopštenog metoda momenata. Takođe, još jedna dobra strana ovog modela je što nema potrebe za ocjenom zajedničke multivarijantne raspodjele, što bi zahtijevalo upotrebu složene tehnike kao što je copula metod sa simulacijama.

Problem mjerenja rizika portfolija je razmatran u izvjesnom broju naučnih radova. Za rješavanje ovog problema, Alexander (2001) koristi ortogonalni GARCH model, van der Weide (2002) uopšteni ortogonalni GARCH model (GO-GARCH), a posebno je interesantna preporuka koju su dali McNeil i Frey (2000) za rješavanje navedenog problema. Naime, njihova procedura ocjene poznata je pod nazivom uslovna teorija ekstremnih vrijednosti, i sastoji se iz dva koraka:

1. Prilagoditi neki GARCH model podacima prinosa funkcijom kvazi-maksimalne vjerodostojnosti. Drugim riječima, potrebno je maksimizirati logaritmovanu funkciju vjerodostojnosti slučajnih članova uzorkovanih podataka, za koje se pretpostavlja da imaju normalnu raspodjelu.

2. Neka standardizovani rezuduali izračunati u prvom koraku predstavljaju proces bijelog šuma. Potrebno je ocijeniti repove slučajnih članova primjenom teorije ekstremnih vrijednosti, i izračunati odgovarajuće kvantile slučajnih članova.

Treba napomenuti da, i u slučaju kada reziduali nemaju normalnu raspodjelu, maksimizacijom logaritmovane funkcije vjerodostojnosti se dobijaju konzistentne i asimptotski normalne ocjene (Engle i Gonzalez-Rivera, 1991).

U nastavku disertacije slijedi empirijska analiza navedenih metodologija za ocjenu parametra vrijednosti pri riziku.

# V EMPIRIJSKA ANALIZA

Svrha empirijske analize je ocjena mjera rizika za dnevne stope prinosa najprije jedne akcije na tržištu Crne Gore i tržišnog indeksa MONEX20, a potom i određenog portfolija akcija. Kao što je rečeno u uvodnom dijelu, najbolje je odabrati neku akciju koja je pokazala izraženu volatilnost u prethodnom periodu, i na kojoj će se moći ilustrovati prednosti i nedostaci pojedinih modela. Upravo iz navedenih razloga je odabrana akcija Elektroprivrede Crne Gore (EPCG), na kojoj su ilustrovani univarijantni modeli računanja parametra vrijednosti pri riziku. Zatim, zbog posmatranja stanja na tržištu kapitala Crne Gore kao tržišta u razvoju, isti modeli su primijenjeni i na tržišni indeks MONEX20, i izvršena je komparacija rezultata datih univarijantnih modela. Takođe, u poslednjem dijelu poglavlja, formira se određeni portfolio od dvije akcije, gdje se akciji EPCG pridružuje i akcija Telekoma Crne Gore (TECG), pa se modelira rizik u tom višedimenzionom slučaju.

Vremenske serije logaritmovanih prinosa akcije Elektroprivrede Crne Gore (EPCG), kao i Telekoma Crne Gore (TECG) u dijelu koji se odnosi na mjerenje VaR-a za dvodimenzioni slučaj, razmatrane su na dnevnom nivou u periodu od 9.01.2004. do 18.06.2013. (ukupno 2338) podataka. Vremenska serija koja se odnosi na logaritmovane prinose tržišnog indeksa MONEX20 sadrži 2508 podataka na dnevnom nivou (od 5.01.2004. do 21.02.2014.). Logaritmovani dnevni prinos (ili neprekidno složen prinos), kao što je u teorijskom dijelu definisano, predstavlja razliku između logaritmovanih nivoa cijena u dva sukcesivna dana. Može se izražavati i procentualno, kada se ovako dobijene razlike pomnože sa 100. Podaci su preuzeti sa web sajta Montenegro berze AD Podgorica.[92] Empirijski rezultati su dobijeni korišćenjem programskog paketa R.

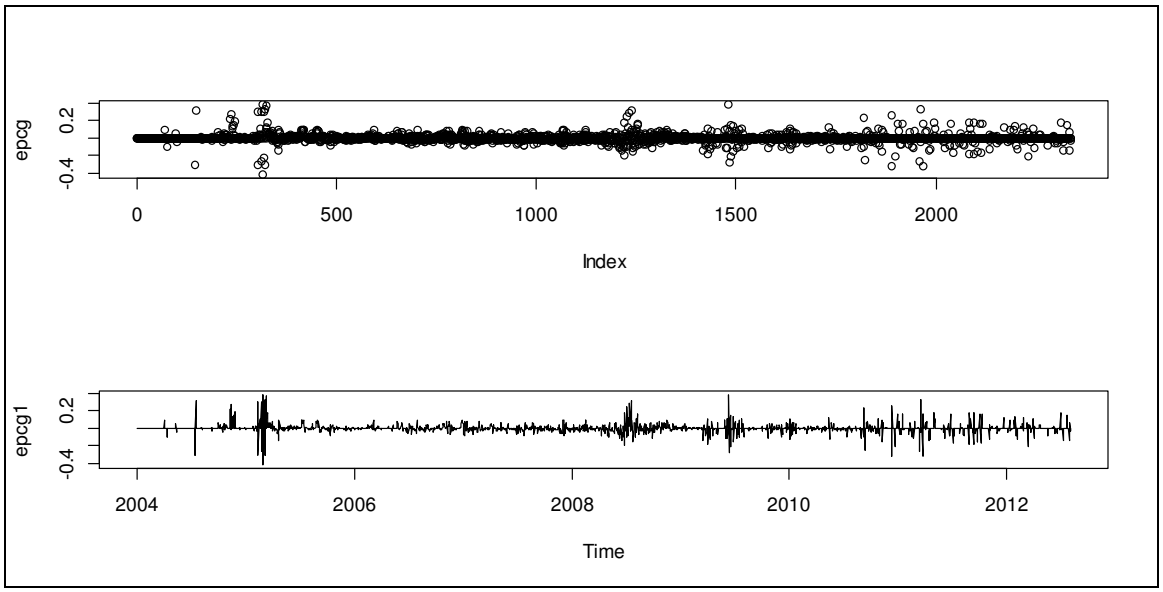
## 5.1. Modeliranje VaR-a jedne akcije primjenom različitih metoda

[92] Montenegro berza AD - http://www.montenegroberza.com.

Dnevna stopa prinosa akcije EPCG je stacionarna (grafik 5.1). Njena empirijska raspodjela odstupa od normalne raspodjele, na šta ukazuju koeficijenti asimetrije i spljoštenosti, kao i zbirni pokazatelj normalosti – Žark-Bera test-statistika (JB). Ove deskriptivne statistike su date u tabeli 5.1. Vrijednost u zagradi pored vrijednosti test-statistike je odgovarajuća *p*-vrijednost. Na grafiku 5.2. je predstavljen Q-Q dijagram dnevne stope prinosa EPCG u odnosu na normalnu raspodjelu, koji takođe potvrđuje odstupanje od normalne raspodjele.

Data serija prinosa nije pretjerano asimetrična, što se zaključuje na osnovu koeficijenta asimetričnosti, ali visok koeficijent spljoštenosti pokazuje da je spljoštenost veća od normalne, odnosno ukazuje na postojanje "teških repova", tj. repovi su teži od repova normalne raspodjele. Žark-Bera (JB) test normalnosti pokazuje da se nulta hipoteza o normalnosti stope prinosa može odbaciti i pri nivou značajnosti od 1%. JB test-statistika ima asimptotski $\chi^2$ raspodjelu sa dva stepena slobode.

**Grafik 5.1.** Dnevna stopa prinosa EPCG



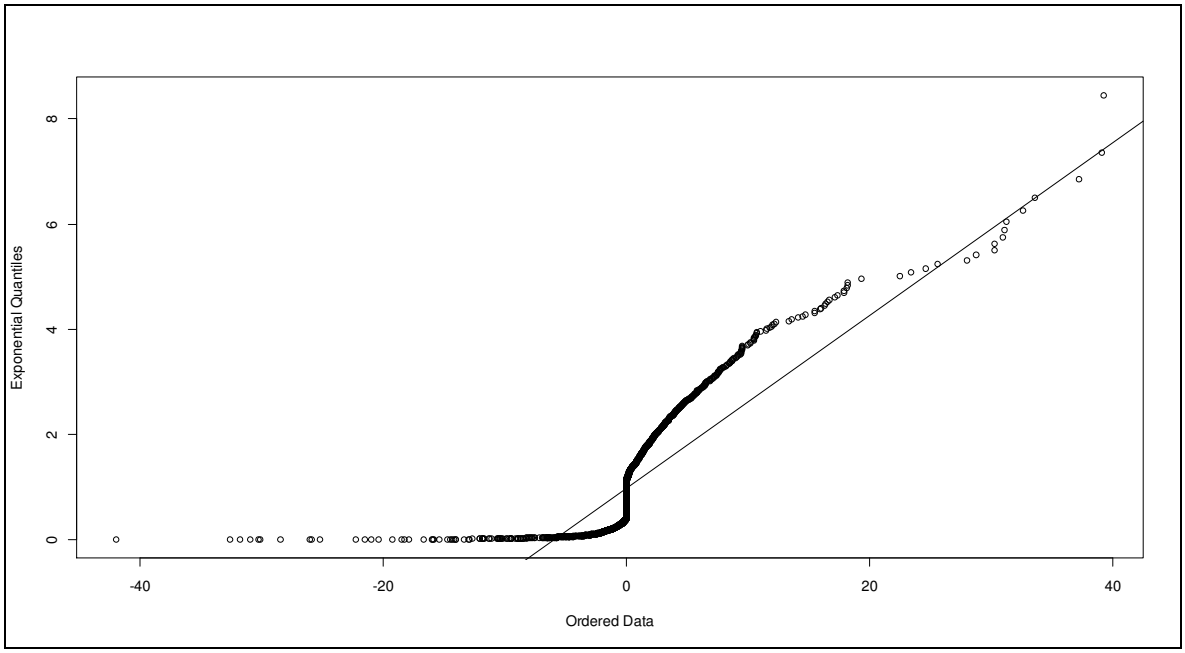

U tabeli 5.1. sledeća je Boks-Ljungova test-statistika (Box-Ljung), koja se koristi za utvrđivanje postojanja autokorelacije reda *m* u kvadriranim podacima i ima asimptotski $\chi^2$ raspodjelu sa *m* stepeni slobode. Nulta hipoteza kod ovog testa podrazumijeva da su

prvih $m$ autokorelacionih koeficijenata kvadriranih podataka jednaki nuli, i ona se u ovom slučaju odbacuje. Veličina $m$ se bira na više načina, a u praksi se pokazao kao najbolji obrazac $m \approx \ln(T)$, gdje je T broj podataka posmatrane promjenljive.[93] U našem slučaju tako dobijena vrijednost za $m$ je 8.

**Tabela 5.1.** Osnovne deskriptivne statistike dnevne stope prinosa akcija EPCG

| Varijansa | Koef. asimetrije | Koef. spljoštenosti | JB | Box-Ljung (m=8) | Box-Ljung ( $a_t^2$ ) |
|---|---|---|---|---|---|
| 23.96 | 0.6 | 19.88 | 38709.92 (<2.2e-16) | 101.76 (<2.2e-16) | 1032.92 (<2.2e-16) |

**Grafik 5.2.** Q-Q dijagram dnevne stope prinosa akcija EPCG u odnosu na normalnu raspodjelu

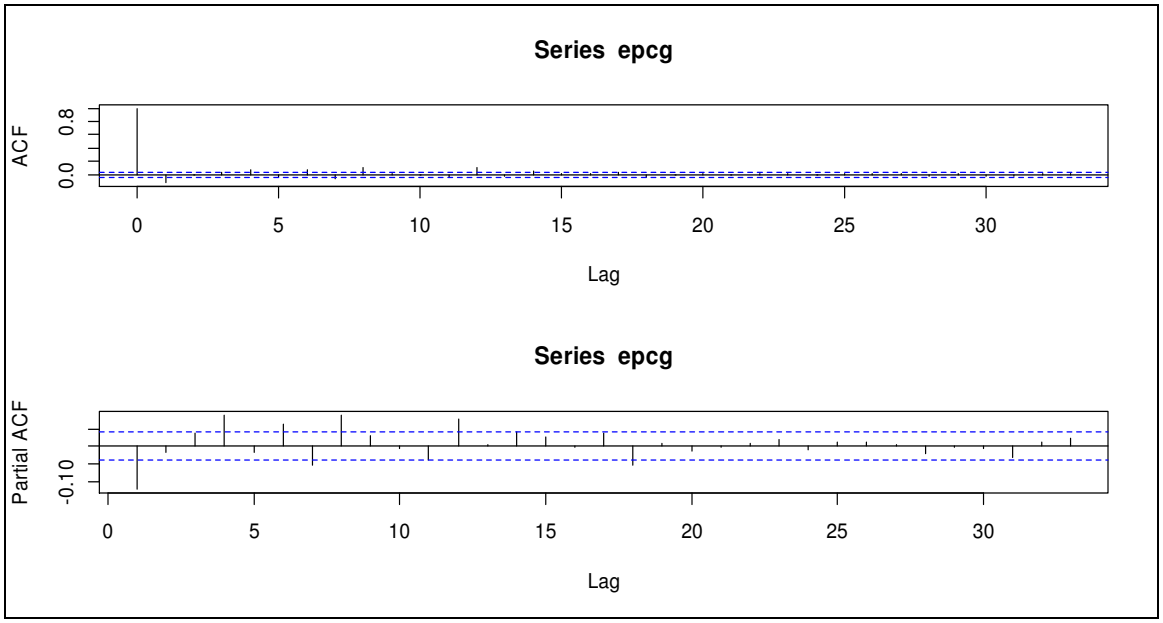



Za provjeru postojanja vremenski promjenljivog varijabiliteta koristi se ista Boks-Ljungova test-statistika, ali na kvadrirane reziduale serije (McLeod i Li, 1983).[94] Rezidual prinosa se definiše kao razlika nivoa prinosa i aritmetičke sredine prinosa,

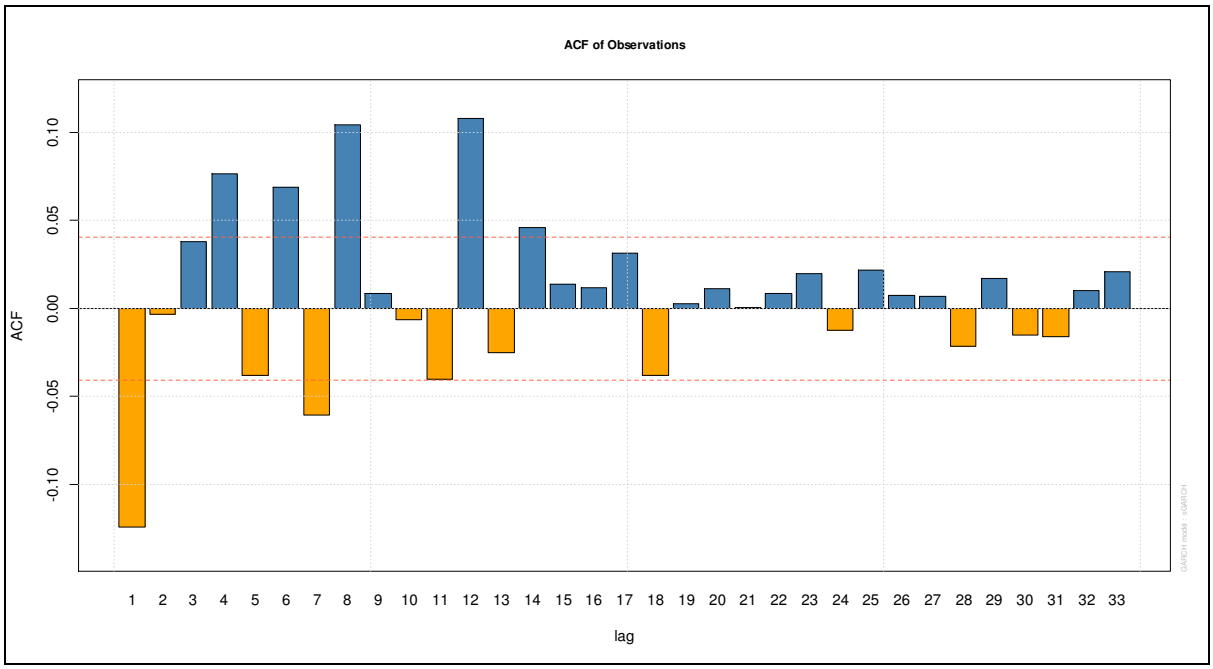
[93] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 33.
[94] Ibid, str. 114.

odnosno $a_t = r_t - \mu_t$. U slučaju prinosa EPCG, najprije je dokazano postojanje serijske korelacije na osnovu Boks-Ljungove test-statistike za podatke prinosa, a ista statistika za kvadrirane reziduale pokazuje takođe visoku volatilnost.

**Grafik 5.3.** Funkcije autokorelacije (ACF) i parcijalne autokorelacije za seriju EPCG




**Grafik 5.4.** Funkcije autokorelacije serije logaritmovanih prinosa akcije EPCG



S obzirom da dnevna stopa prinosa akcija EPCG ima nestabilnu varijansu, prirodno se nameće da se njena dinamika ocijeni pomoću GARCH modela. Na osnovu analize specifikacije – uzoračkih funkcija autokorelacije i parcijalne autokorelacije (grafik. 5.3. i 5.4.) – procjenjuje se da je najbolji model ARMA(1,3). Kretanje volatilnosti se na zadovoljavajući način opisuje modelom GARCH(1,1).

Zajednički ocijenjeni ARMA(1,3)-GARCH(1,1) model glasi:

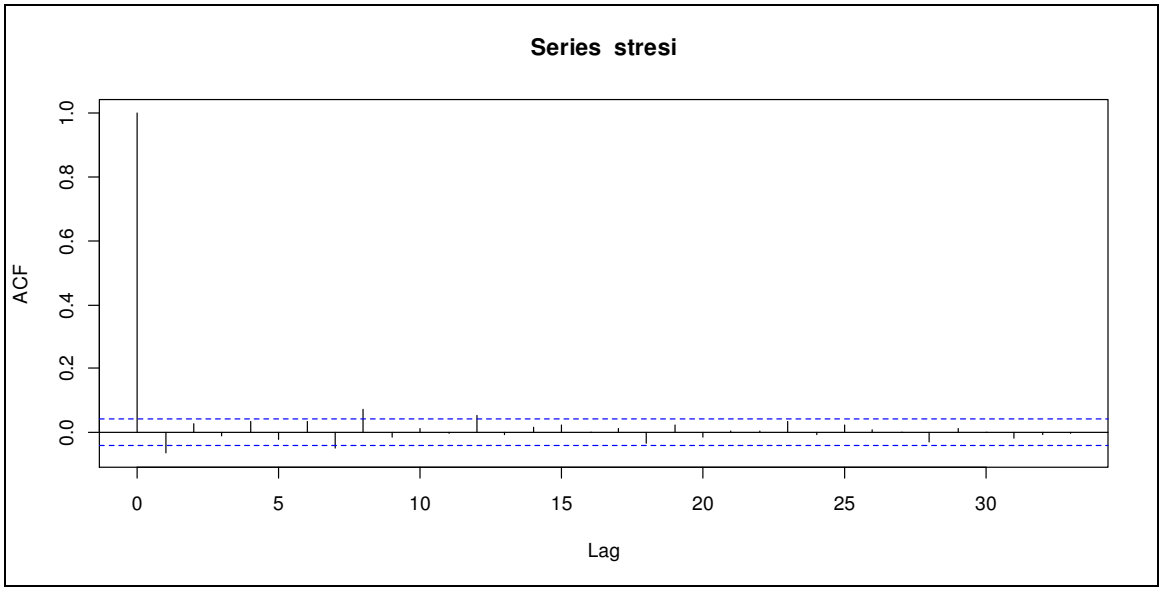
$$r_t = -0.000016929 + 0.99696 r_{t-1} + a_t + 0{,}87183 a_{t-1} + 0.17137 a_{t-2} - 0.051543 a_{t-3},$$
$$\sigma_t^2 = 0.00018531 + 0.17587 a_{t-1}^2 + 0.74366 \sigma_{t-1}^2.$$

Svi koeficijenti modela su statistički značajni već pri 1% nivou značajnosti, izuzev slobodnih članova u obje jednačine koji su značajni pri nivou od 10%.

**Tabela 5.2.** Testovi ARMA(1,3)-GARCH(1,1) modela: test-statistike i *p*-vrijednosti

| JB | Box-Ljung Q(10) | Box-Ljung ($a_t^2$) | LM ARCH Test |
|---|---|---|---|
| 75584.7 (0) | 37.75 (4,2e-05) | 4.2146 (0.937) | 5.46 (0.94) |

**Grafik 5.5.** Funkcije autokorelacije standardizovanih reziduala modela ARMA(1,3)-GARCH(1,1)



Testovi normalnosti reziduala, autokorelacije i uslovne heteroskedastičnosti dati su u tabeli 5.2. Dakle, vidi se da izabrani model, koji od svih ekonometrijskih modela ima najbolje sveukupne pokazatelje (kod ostalih modela nijesu svi parametri bili signifikantni), zaista dobro opisuje volatilnost. Međutim GARCH model nije uspješno otklonio autokorelaciju, što se može vidjeti na osnovu Box-Ljungovog testa. Ipak, autokorelacija je dovoljno smanjena što se zaključuje na osnovu funkcija autokorelacije standardizovanih reziduala, na grafiku 5.5.

U tabeli 5.3. date su prognoze stope prinosa i volatilnosti (uslovne standardne devijacije) za jedan dan unaprijed, koje se koriste za ocjenu parametra vrijednosti pri riziku. Ocjene su izračunate za vjerovatnoće od 95% i 99%.

**Tabela 5.3.** Ekonometrijska ocjena VaR-a za period od 1 do 5 dana (stopa prinosa EPCG)

| Period | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prognoza prinosa | -0.00092457 | -0.00255218 | -0.0023455 | -0.0023553 | -0.002365 |
| Prognoza uslovne st. devijacije | 0.04619341 | 0.04634036 | 0.04647508 | 0.04659861 | 0.04671191 |
| VaR(1,0.95) | 7.483% | 7.367% | 7.41% | 7.429% | 7.447% |
| VaR(1,0.99) | 10.65% | 10.52% | 10.57% | 10.6% | 10.63% |

Interpretacija dobijenog rezultata parametra pri riziku je sledeća: ako se raspolaže akcijama EPCG u nekoj vrijednosti (npr. 1000 eura), tada mogući gubitak za vlasnika akcija, u periodu od jednog dana, nije veći od 7.483% vrijednosti (74.83 eura) sa vjerovatnoćom od 95%. Sa vjerovatnoćom 99%, ocjena tog maksimalnog gubitka je 10.65% od vrijednosti (106.5 eura).

**Riskmetrics** metoda za računanje parametra VaR-a pretpostavlja da je uslovna srednja vrijednost jednaka nuli, i da volatilnost prinosa prati IGARCH(1,1) model. Prilagođeni model glasi

$$r_t = a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = 0.041657\,\sigma_{t-1}^2 + (1 - 0.041657)a_{t-1}^2,$$

gdje je $\varepsilon_t$ standardna Gausova serija bijelog šuma. Q statistika za kvadrirane standardizovane reziduale je veoma niska (0.0005967), ali nije statistički značajna.

Na osnovu prilagođenog modela predviđena volatilnost za 1 period unaprijed je $\hat{\sigma}(1) = 0.04951$, pa je 95% kvantil uslovne raspodjele $1.65 \times 0.04951 = 0.0816915$. VaR za vjerovatnoću od 95% za 1 period unaprijed za poziciju od npr. 1000 eura, biće

$$VaR = 1000€ \times 0.0816915 = 81.6915€.$$

Po istom principu, 99% kvantil je $2.326 \times 0.04951 = 0.11516026$, pa je parametar vrijednosti pri riziku, za datu vjerovatnoću približno 115.16€.

RiskMetrics metoda, dakle, daje rezultate parametra vrijednosti pri riziku, koji imaju sledeću interpretaciju: u slučaju posjedovanja akcija EPCG u vrijednosti od npr. 1000 eura, gubitak koji se može ostvariti, u periodu od jednog dana, nije veći od 81.6915 eura, sa vjerovatnoćom od 95%. Uz vjerovatnoću od 99%, maksimalni gubitak koji se može ostvariti, posjedovanjem akcija EPCG u vrijednosti od 1000 eura, u periodu od jednog dana, iznosi 115.16 eura. U poređenju sa prethodnom ekonometrijskom ocjenom (drugim ARMA-GARCH modelom), ocjena parametra vrijednosti pri riziku RiskMetrics metodom je nešto veća.

**Kvantilna ocjena** VaR-a se dobija kao empirijski 99% kvantil, čija je vrijednost za dnevnu stopu prinosa EPCG 14.64244%, odnosno, ako posjedujemo akcije EPCG u vrijednosti od npr. 1000 eura, gubitak koji možemo ostvariti, u periodu od jednog dana,

nije veći od 146.4244 eura, sa vjerovatnoćom od 99%. Mjera očekivani gubitak, uz istu vjerovatnoću iznosi 23.19685%, što znači da ako se prekorači vrijednost parametra pri riziku, u istom slučaju posjedovanja akcija EPCG u vrijednosti od 1000 eura, gubitak koji se očekuje u periodu od jednog dana je 231.97 eura. Uz nivo pouzdanosti od 95%, VaR iznosi 5.395%, a mjera očekivanog gubitka je 11.69%, odnosno 53.95€ i 116.9€, respektivno.

Sledeća ocjena parametra vrijednosti pri riziku odnosi se na **ocjenu na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti**. Najprije treba odrediti Hilovu ocjenu parametra oblika. Tabela 5.4. sadrži rezultate ocjene parametra oblika pomoću Hilove ocjene. U tabeli su data tri izbora za $q$, i kao što se može vidjeti, rezultati su stabilni bez obzira na variranje veličine $q$. Takođe, grafik 5.6. pokazuje dijagrame rasturanja Hilove ocjene sa intervalom povjerenja od 95%. Očigledno je da ocjena raste sa porastom veličine $q$ i za pozitivne i za negativne logaritamske prinose. Dijagrami takođe ukazuju na činjenicu da su parametri oblika nešto veći za negativne prinose, što može biti znak da dnevni logaritamski prinosi imaju teži lijevi rep raspodjele. Rezultati, dakle, pokazuju da raspodjela dnevnih logaritamskih prinosa pripada Frešeovoj familiji raspodjela.

**Grafik 5.6.** Dijagrami rasturanja Hilove ocjene za dnevne stope prinosa EPCG, pozitivni i negativni prinosi

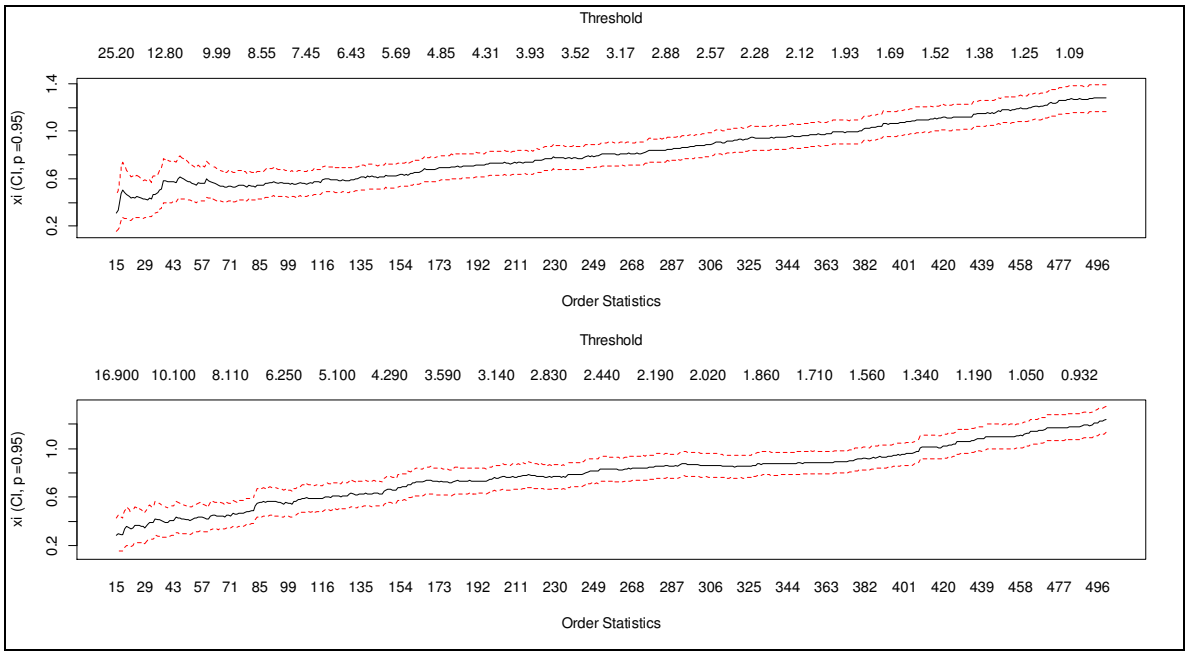



**Tabela 5.4.** Rezultati Hilove ocjene VaR-a za stopu prinosa EPCG[1]

| $q$ | 190 | 200 | 210 |
|---|---|---|---|
| $r_t$ | 0.723 (0.052) | 0.735 (0.0519) | 0.737 (0.051) |
| $-r_t$ | 0.737 (0.053) | 0.759 (0.054) | 0.769 (0.053) |

[1]Standardne greške ocjena date su u zagradama.

Za ocjenu parametara uopštene raspodjele ekstremnih vrijednosti koristimo metod maksimalne vjerodostojnosti. U tabeli 5.5. date su ocjene rezultata pri različitim vrijednostima izabranih podperioda, od jednog mjeseca ($n$=21), do pola godine ($n$=126). Na osnovu dobijenih rezultata, možemo zaključiti da:

- Ocjene parametara $\alpha_n$ i $\beta_n$ se povećavaju sa porastom veličine podperioda, $n$, što se i očekivalo (jedino kod maksimalnih prinosa dolazi do pada sa porastom od $n$=63 na $n$=126);
- Ocjene parametra oblika se smanjuju i postaju stabilne sa porastom veličine podperioda, $n$ (tačnije za $n > 63$, sa izuzetkom kod maksimalnih prinosa);

- Ocjene parametra oblika su manje stabilne kod pozitivnih prinosa, i u našem slučaju, čak dolazi do značajnog povećanja parametra oblika za $n$=126, i
- Standardne greške ocjena se značajno povećavaju sa porastom broja $n$.

**Tabela 5.5.** Ocjene parametara raspodjele ekstremne vrijednosti dobijene metodom maksimalne vjerodostojnosti za dnevne logaritamske prinose EPCG[1]

| Veličina podperioda | $\alpha_n$ | $\beta_n$ | $\gamma_n$ |
|---|---|---|---|
| | *Minimalni prinosi* | | |
| Mjesec ($n$=21, $g$= 111) | 3.725 (0.352) | 4.153 (0.412) | 0.311 (0.096) |
| Kvartal ($n$=63, $g$= 37) | 5.879 (0.879) | 8.308 (1.121) | 0.136 (0.161) |
| Polugod. ($n$=126, $g$= 18) | 6.025 (1.328) | 10.786 (1.653) | 0.171 (0.249) |
| | *Maksimalni prinosi* | | |
| Mjesec ($n$=21, $g$=111) | 4.277(0.411) | 4.689 (0.465) | 0.376 (0.091) |
| Kvartal ($n$=63, $g$= 37) | 7.332 (1.078) | 10.495 (1.322) | 0.247 (0.123) |
| Polugod. ($n$=126, $g$=18) | 5.087 (1.574) | 11.695 (1.336) | 0.797 (0.271) |

[1]Standardne greške ocjena date su u zagradama.

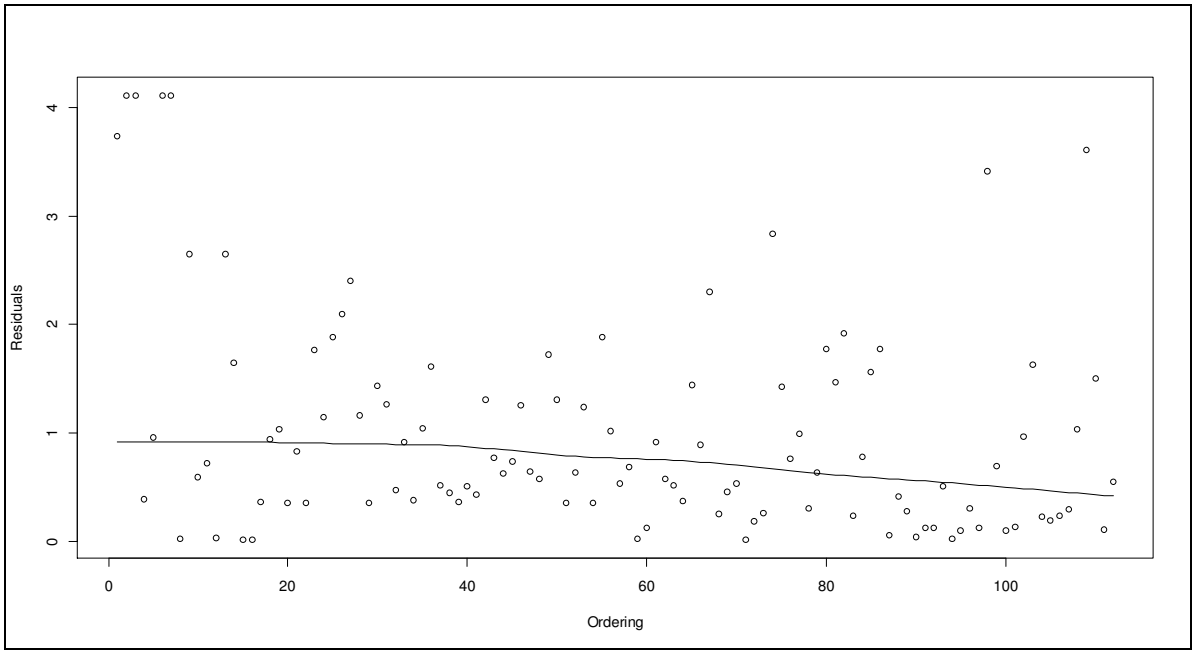
Koristeći funkciju gustine vjerovatnoće uopštene raspodjele ekstremnih vrijednosti, može se pokazati da reziduali te raspodjele treba da formiraju slučajan uzorak eksponencijalno raspodijeljenih slučajnih promjenljivih ako je prilagođeni model ispravno specificiran. Grafik 5.7. upravo pokazuje dijagram rasturanja reziduala uopštene raspodjele ekstremnih vrijednosti prilagođenih dnevnim negativnim logaritamskim prinosima za podperiod od 21 dana. Q-Q grafik reziduala naspram eksponencijalne raspodjele prikazan je na grafiku 5.8., pa se na osnovu oba grafička prikaza vidi da je prilagođenost dobra.

Parametar VaR se sada računa na osnovu formule (3.23). Pri riziku greške od 1%, odgovarajuća vrijednost parametra za $n$=63, na osnovu podataka iz tabele 5.5, je

$$VaR = 8.308 - \frac{5.879}{0.136}\left\{1 - \left[-63\ln(1-0.01)\right]^{-0.136}\right\} = 5.7030057.$$

Interpretacija ovog rezultata je sledeća: u slučaju posjedovanja akcija EPCG u vrijednosti od npr. 1000 eura, gubitak koji se može ostvariti, u periodu od jednog dana, nije veći od 57.030057 eura, sa vjerovatnoćom od 99%.

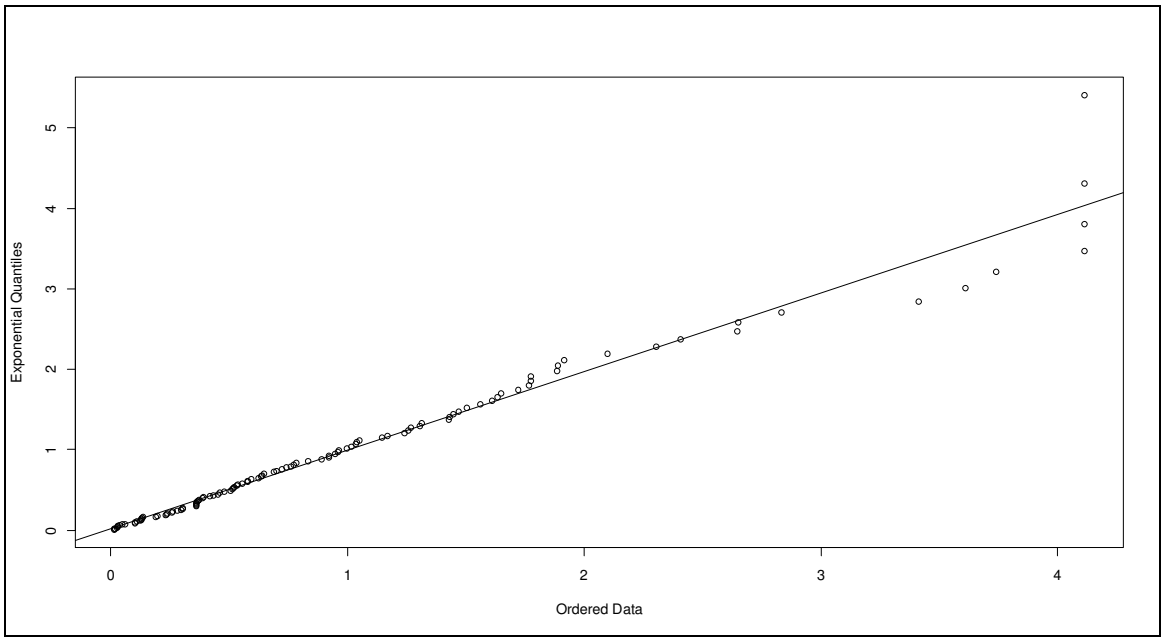
**Grafik 5.7.** Dijagram rasturanja reziduala za prilagođavanje raspodjeli ekstremnih vrijednosti za dnevne negativne logaritamske prinose EPCG, za podperiode od 21 dan




Ako uzmemo u obzir veličinu podperioda od 21 dana, tada je VaR pri istom riziku greške

$$VaR = 4.153 - \frac{3.725}{0.311}\left\{1 - \left[-21\ln(1-0.01)\right]^{-0.311}\right\} = 11.605719.$$

**Grafik 5.8.** Q-Q grafik reziduala za prilagođavanje raspodjeli ekstremnih vrijednosti, naspram normalne raspodjele, za dnevne negativne logaritamske prinose EPCG, za podperiode od 21 dan




Analogno, po istoj formuli, se dobijaju vrijednosti parametra VaR pri riziku greške od 5%, koje ćemo takođe koristiti za komparaciju rezultata na osnovu različitih modela. Pri veličini podperioda od 21 dana, uz rizik greške od 5%, VaR iznosi 3.8793.

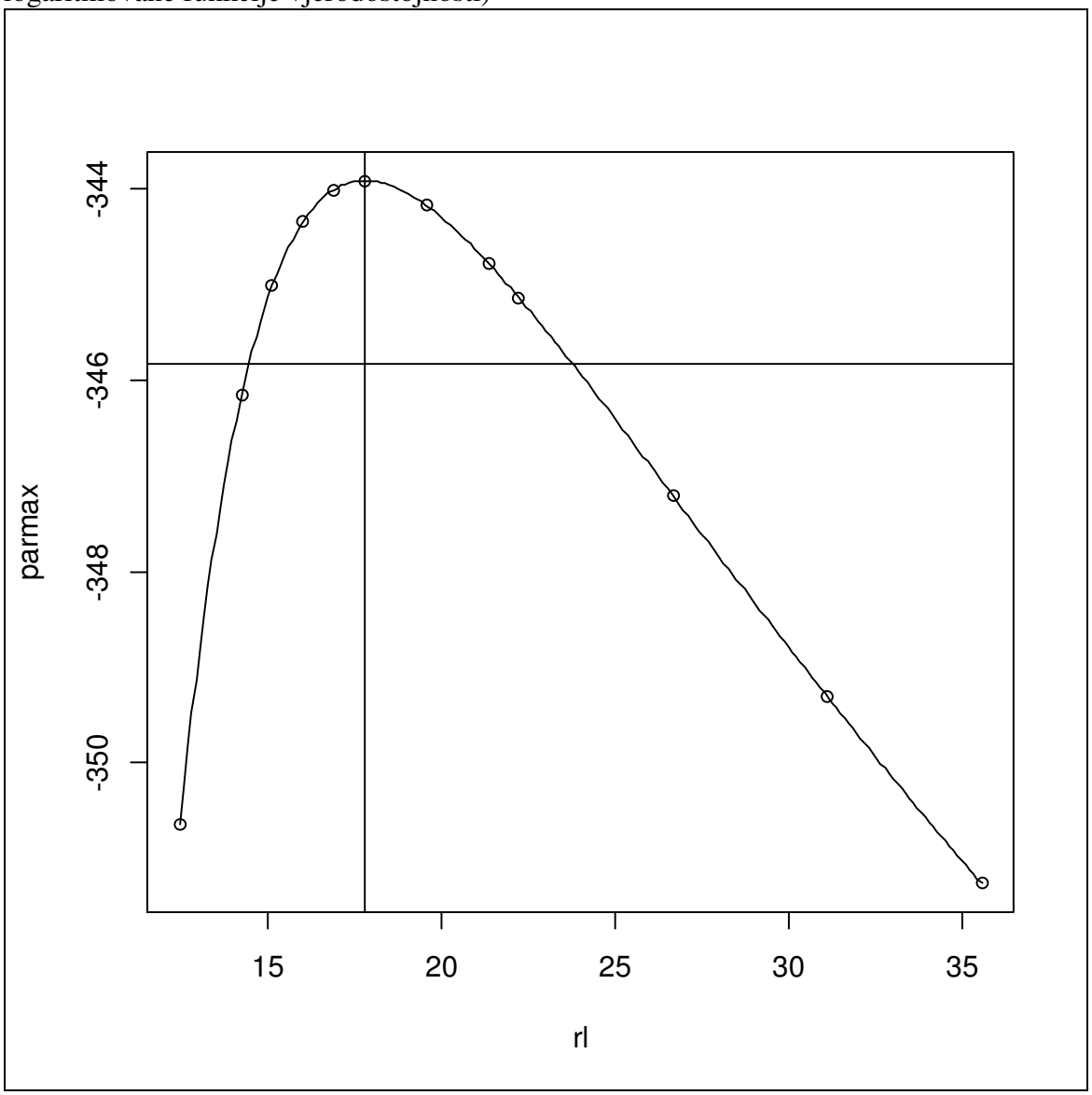
Vrijednosti parametra pri riziku, na osnovu tradicionalne teorije ekstremnih vrijednosti se mogu dovesti u pitanje, jer se statističkim testovima često odbacuje pretpostavka o nezavisnosti dnevnih logaritmovanih prinosa. Takođe, značajan uticaj na rezultat ima i izbor veličine podperioda, nasuprot činjenice o grupisanju volatilnosti. Ove slabosti prevazilazi novi pristup teorije ekstremnih vrijednosti, koji će se izložiti u nastavku.

Na osnovu formule (3.32) se može dati i procjena parametra vrijednosti pri riziku za duži vremenski period. Npr. pri riziku greške od 1%, za $n$=63, odgovarajuća vrijednost parametra VaR za jedan period je 5.7030057. To znači da ako posjedujemo akcije EPCG u vrijednosti od 1000€, maksimalni gubitak za sledeći dan trgovanja je 57.030057€. Odgovarajuća vrijednost parametra za vremenski horizont od 30 dana bila bi

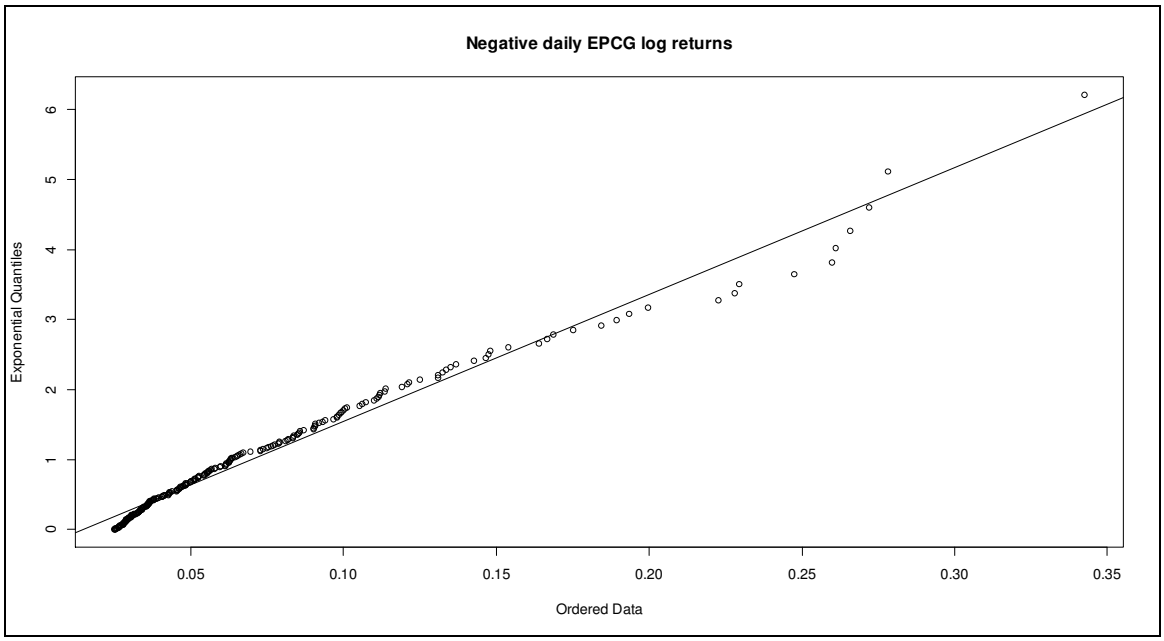
$$VaR(30) = 30^{0.136} VaR = 1.588 * 57.030057 = 90.563730516.$$

Nivo prinosa za 12 podperioda, za dnevne negativne logaritamske prinose EPCG, na osnovu podperioda od 21 dan, može se ocijeniti na osnovu prilagođenog modela i iznosi 17.77%. Intervalna ocjena ove mjere rizika predstavljena je na grafiku 5.9.

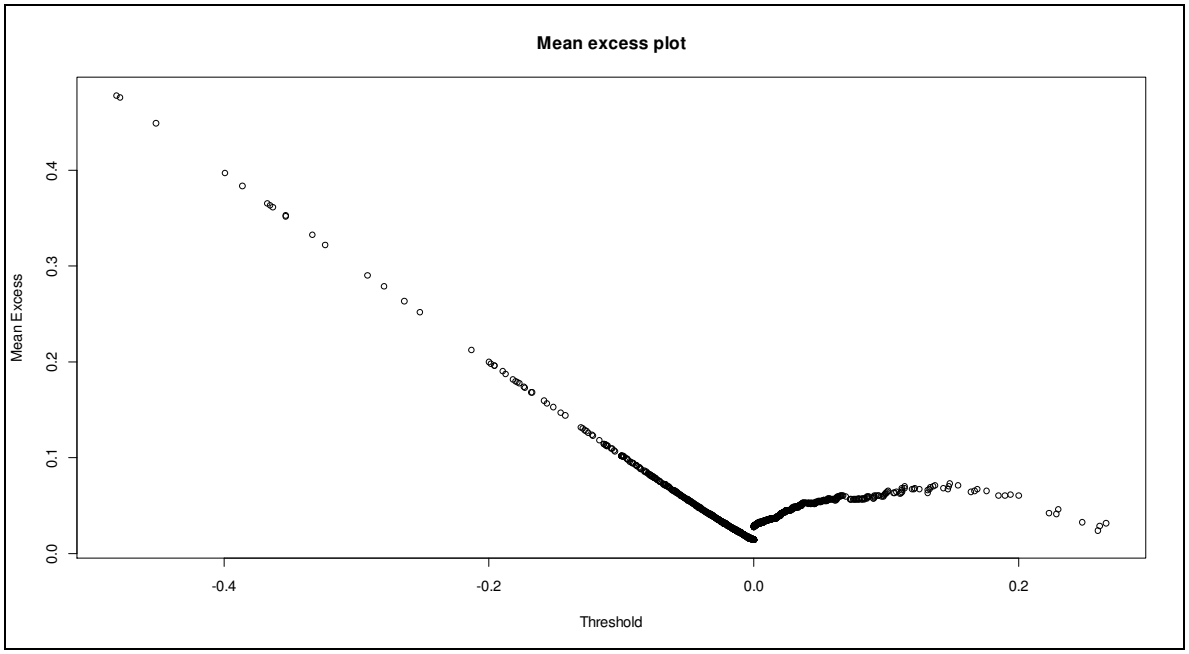
**Grafik 5.9.** Grafik intervala povjerenja za nivo prinosa akcija EPCG (na osnovu logaritmovane funkcije vjerodostojnosti)



**Grafik 5.10.** Q-Q dijagram prekoračenja iznad datog praga 2.5% za negativne stope prinosa akcija EPCG




**Grafik 5.11.** Grafik funkcije srednjeg prekoračenja za negativne stope prinosa akcija EPCG




Slijedi ocjena parametra vrijednosti pri riziku na osnovu novog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti – **metoda vrhova iznad datog praga**. Razmatraju se negativni

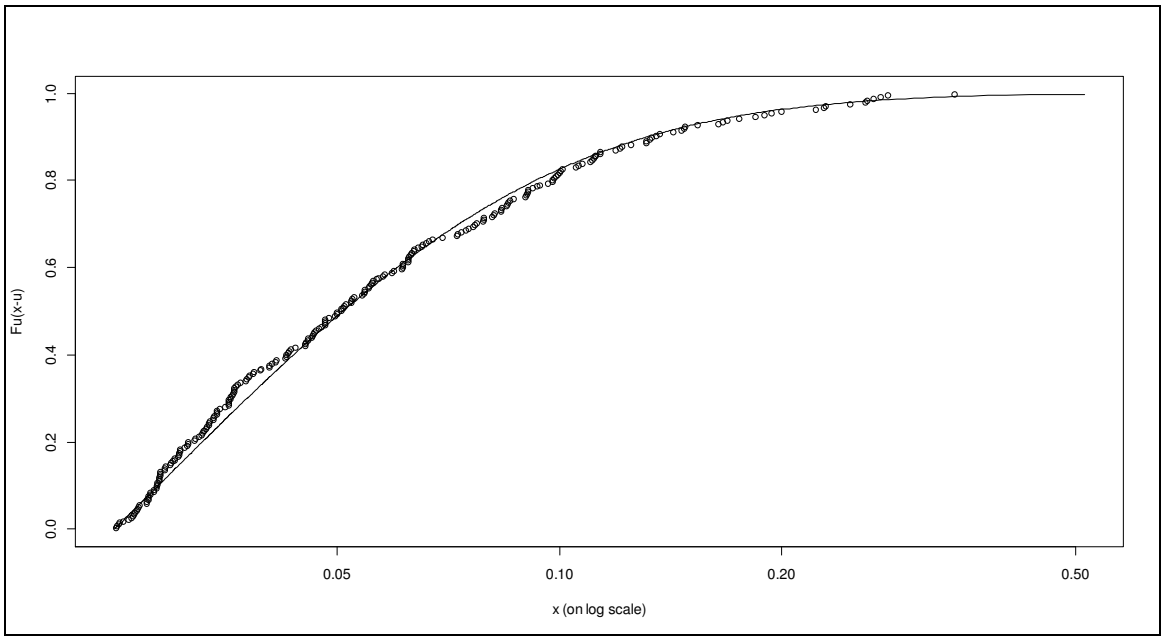
logaritmovani prinosi akcija EPCG, a na osnovu literature za serije stabilnih prinosa, obično se za prag $u$ bira 2.5%. Na grafiku 5.10. se vidi na osnovu Q-Q grafika da navedeni prinosi odstupaju od normalne raspodjele, pa se zaključuje da je koeficijent $\gamma \neq 0$. Takođe, grafik funkcije srednjeg prekoračenja (grafik 5.11.) je linearan od nivoa praga od najviše 3%.

**Tabela 5.6.** Ocjene rezultata dvodimenzionog Poisson-ovog modela dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG[1]

| Prag | Prekoračenja | $\gamma_n$ | $\alpha_n$ | $\beta_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 3% | 213 | 0.271 (0.084) | 0.02 (0.0056) | -0.0383 (0.012) |
| 2.5% | 251 | 0.31 (0.078) | 0.017 (0.04) | -0.03058 (0.008) |
| 2% | 315 | 0.437 (0.072) | 0.0109 (0.002) | -0.015 (0.0045) |

[1]Standardne greške ocjena date su u zagradama.

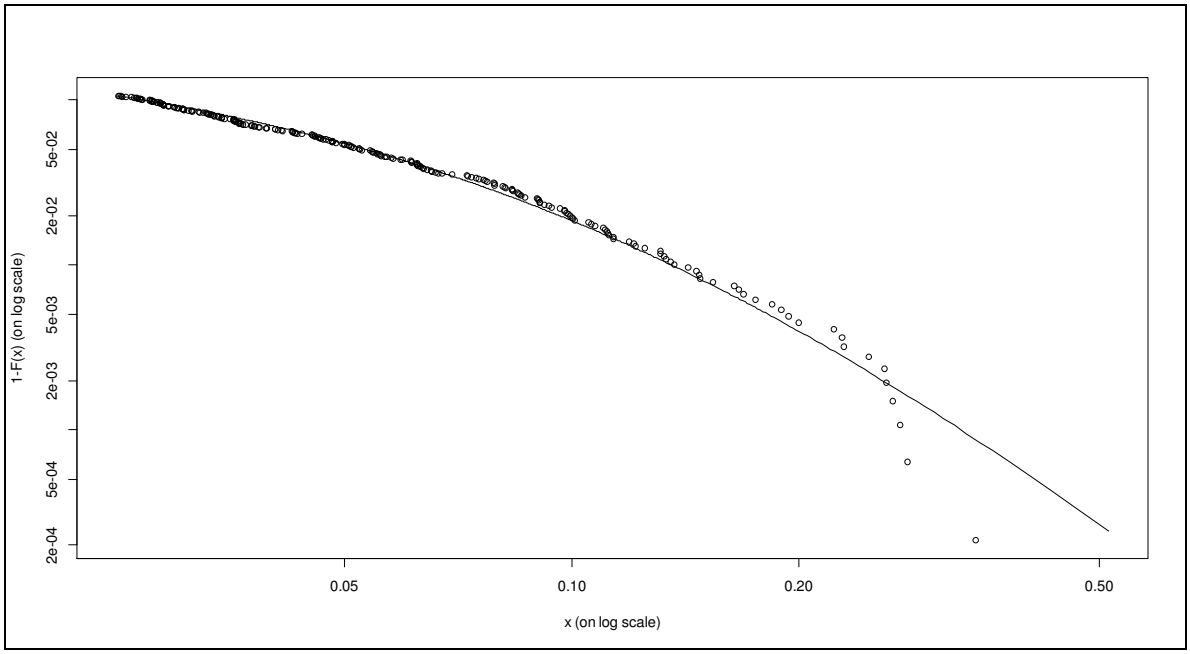
**Grafik 5.12.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG




Skup ekstremnih događaja smo odredili na osnovu podataka prinosa koji premašuju prag 2.5%. Takav skup ima 251 podatak. Na bazi tog skupa podataka se modelira raspodjela

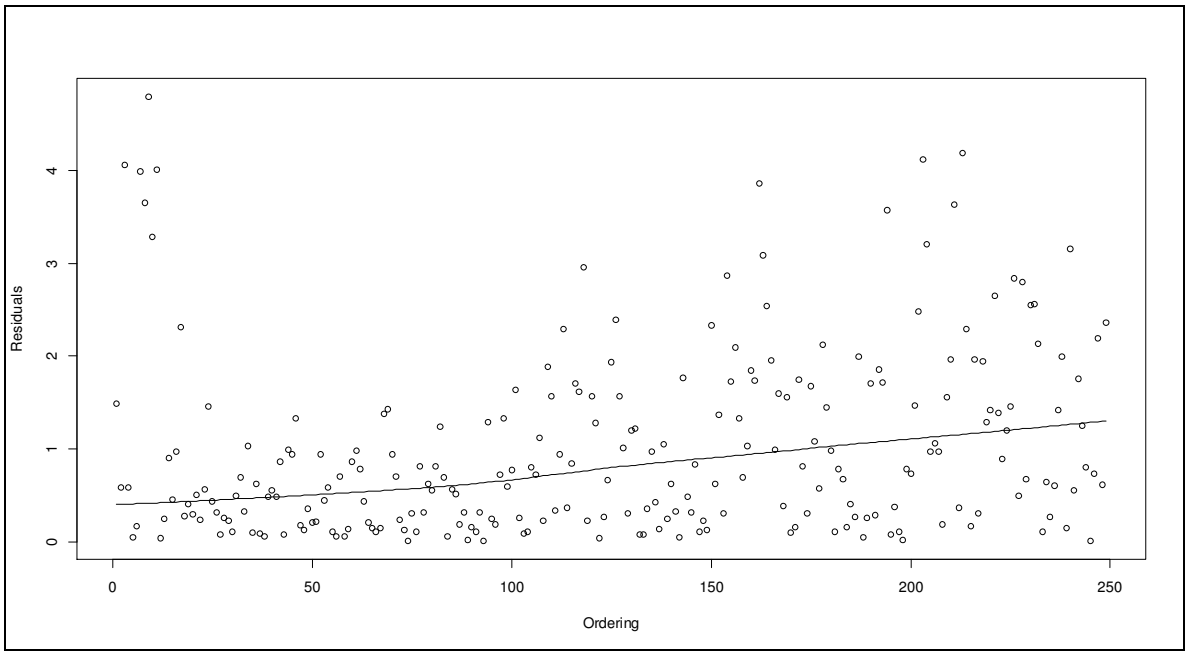
maksimuma negativnih logaritmovanih prinosa akcija EPCG. Tabela 5.6. sadrži ocjene parametara $\gamma$, $\alpha$ i $\beta$ za dati skup podataka, uz variranje praga od 2% do 3%. Dati parametri se koriste za računanje parametra VaR, uz napomenu da treba provjeriti adekvatnost datog modela, koja se može bazirati na dijagramima 5.12.-5.15.

**Grafik 5.13.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele repu raspodjele prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG




Naime, data četiri dijagrama pokazuju dobro prilagođavanje uopštene Pareto raspodjele podacima. Q-Q dijagram (grafik 5.15.) pokazuje neznatna odstupanja od prave linije, što potvrđuje i ocjena vjerovatnoće repa na logaritamskoj skali (grafik 5.13.), na osnovu čega se zaključuje da se dalje može poboljšati modeliranje.

**Grafik 5.14.** Dijagram rasturanja reziduala prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG




**Grafik 5.15.** Q-Q dijagram reziduala prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa EPCG

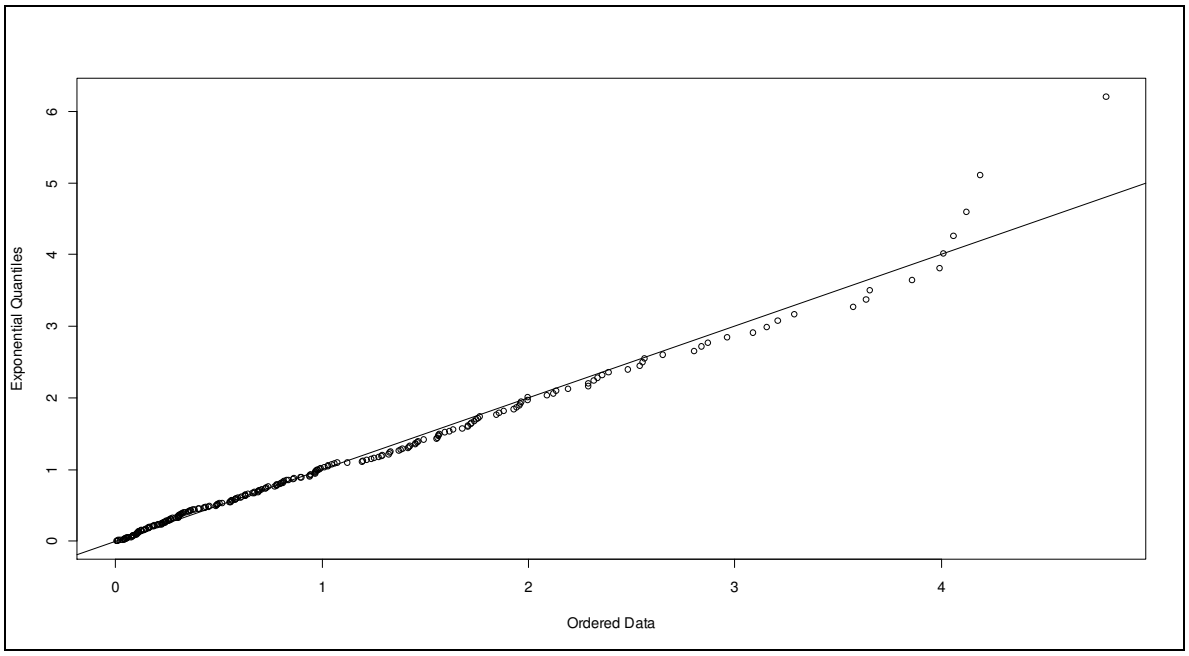


**Tabela 5.7.** Ocjene rezultata vrijednosti parametra pri riziku i očekivanog gubitka na osnovu metoda vrhova iznad datog praga za stopu prinosa EPCG

| *Prag* | *p*-vrijednost | VaR | Očekivani gubitak |
|---|---|---|---|
| 2.5% | 0.05 | 0.05490012=5.49% | 0.1185879=11.86% |
| | 0.01 | 0.14661115=14.66% | 0.2514971=25.15% |
| | 0.001 | 0.389812=38.98% | 0.603948=60.39% |
| 2% | 0.05 | 0.0526414=5.26% | 0.1246470=12.46% |
| | 0.01 | 0.1473389=14.73% | 0.2927310=29.27% |
| | 0.001 | 0.4724329=47.24% | 0.8697588=86.98% |
| 3% | 0.05 | 0.05526823=5.53% | 0.1179026=11.79% |
| | 0.01 | 0.14737246=14.74% | 0.2443104=24.43% |
| | 0.001 | 0.37328683=37.33% | 0.5543650=55.44% |

Metod vrhova iznad datog praga daje rezultate za vrijednosti parametra pri riziku i očekivanog gubitka koji su sumirani u tabeli 5.7. Zaključuje se da su rezultati parametara stabilniji u odnosu na tradicionalni pristup teorije ekstremnih vrijednosti, kod kojeg su izražene varijacije ocjena parametara u zavisnosti od izbora veličine podperioda *n*. Ovdje je evidentno da se rezultati VaR-a i očekivanog gubitka manje razlikuju u zavisnosti od različitih vrijednosti praga prekoračenja, a pri istoj vjerovatnoći ocjene. Samim tim, opšti zaključak je da je ovaj pristup superiorniji u odnosu na tradicionalni pristup teorije ekstremnih vrijednosti. Komparacija rezultata svih ilustrovanih modela slijedi u narednom dijelu.

### 5.1.1. Komparativna analiza rezultata jednodimenzionog modela (prinosi akcija EPCG)

U cilju komparacije rezultata, sumiraćemo vrijednosti parametra pri riziku dobijene različitim metodama računanja. Ako posjedujemo akcije EPCG u vrijednosti od 1000€, uz vjerovatnoću od 5%, što znači da je 95% vjerovatno da će gubitak biti manji ili jednak VaR-u za sledeći dan trgovanja, rezultati parametra su sledeći:

- 74.83€ primjenom ARMA(1,3)-GARCH(1,1) modela;
- 81.6915€ primjenom RiskMetrics metode;
- 53.95€ kvantilnom ocjenom;
- 38.793€ primjenom tradicionalne teorije ekstremnih vrijednosti (veličina podperioda je 21 dan);
- 54.9€ primjenom novog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti – metod vrhova iznad datog praga (prag je 2.5%).

Odgovarajuće vrijednosti parametra uz vjerovatnoću od 1% su:

- 106.5€ primjenom ARMA(1,3)-GARCH(1,1) modela;
- 115.16€ primjenom RiskMetrics metode;
- 146.4244€ kvantilnom ocjenom;
- 116.057€ primjenom tradicionalne teorije ekstremnih vrijednosti (veličina podperioda je 21 dan);
- 146.6€ primjenom novog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti – metod vrhova iznad datog praga (prag je 2.5%).

Zbog različitog tretiranja u ocjenjivanju ponašanja repa statističke raspodjele nastaju i razlike u različitim pristupima. S obzirom na činjenicu da ne postoji realna vrijednost parametra pri riziku kojom bi se provjerila tačnost različitih pristupa, potrebno je istaći da je uvijek uputno primijeniti nekoliko modela u računanju VaR-a, kako bi se odredio njegov mogući raspon. U našem slučaju je evidentno da, sa pouzdanošću ocjene od 95%, tradicionalni pristup teorije ekstremnih vrijednosti značajno potcjenjuje VaR.

Rezultat ekonometrijskog ocjenjivanja (ARMA-GARCH modeli i RiskMetrics), pod uslovom da su sve pretpostavke za njihovu primjenu ispunjene, zavisi od izabranog modela. Zbog toga je neophodno, kao što smo i na primjeru pokazali, da detaljna analiza specifikacije potencijalnih modela predstavlja prvu fazu u izvođenju ocjene parametra vrijednosti pri riziku. Nameće se zaključak da su se ekonometrijske ocjene pokazale kao nestabilne, s obzirom da pri riziku greške od 5% one predstavljaju gornju granicu, a pri

riziku greške od 1% predstavljaju donju granicu mogućeg intervala kretanja parametra pri riziku.

Dalje, važnu ulogu u računanju VaR-a ima i izbor vjerovatnoće repa raspodjele.[95] Veličina posmatranog uzorka od 2338 podataka može se smatrati dovoljno velikom da empirijski kvantili sa vjerovatnoćom od 99% i 95% daju dobre ocjene kvantila raspodjele prinosa. U slučaju oba nivoa rizika greške kvantilna ocjena parametra vrijednosti pri riziku je veoma bliska ocjeni na osnovu novog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti. Primjećujemo da navedene dvije ocjene pri riziku greške od 1% daju gornju granicu raspona mogućih vrijednosti parametra pri riziku.

Ocjenjivanje na osnovu primjene teorije ekstremnih vrijednosti zasniva se na modeliranju repa empirijske raspodjele. Jedna od osnovnih odluka kod ovog pristupa je izbor praga, na osnovu koga se bira skup ekstremnih vrijednosti, koji je predmet dalje statističke analize. Nepostojanje egzaktnog metoda za izbor praga smanjuje pouzdanost dobijenih rezultata.

Takođe, kod metoda vrhova iznad datog praga (tabela 5.7.) vidimo da korišćenjem veoma male vjerovatnoće od 0.1% dobijamo manje pouzdane ocjene VaR-a. Stoga, dati nivo rizika greške nismo koristili u primjeni ostalih metoda.

## 5.2. Modeliranje VaR-a tržišnog indeksa MONEX20 primjenom različitih metoda

Najbolji pokazatelj opšteg stanja na tržištu kapitala Crne Gore kao tržišta u razvoju, jeste tržišni indeks Montenegroberze – MONEX20. MONEX20 čini 20 najlikvidnijih akcija sa crnogorskog berzanskog tržišta, pa stoga ovaj tržišni indeks najbolje pokazuje kretanje cijena na crnogorskom tržištu kapitala. U narednom dijelu empirijske analize su primijenjeni univarijantni modeli za računanje parametra vrijednosti pri riziku i

[95] Tsay, R. S. (2010) Op. cit. str. 357.

očekivanog gubitka na indeks MONEX20, i izvršena je komparacija rezultata datih univarijantnih modela.

### 5.2.1. Metodologija za izračunavanje indeksa MONEX20

Indeks Montenegroberze[96] (skraćeno MONEX20) čine akcije 20 emitenata koje se nalaze na berzanskom i slobodnom tržištu akcija. Posebni kriterijumi su formirani sa ciljem da u sastav indeksa MONEX20 uđu najlikvidnije akcije emitenata koje će na najbolji način odražavati kretanje cijena na crnogorskom tržištu. MONEX20 je ponderisani (težinski) indeks – učešće pojedinog emitenta u indeksu se određuje na osnovu kapitalizacije tog emitenta. U tržišnu kapitalizaciju ulaze redovne akcije koje su u slobodnom prometu (free float). Podatak o broju akcija u slobodnom prometu se dobija iz Centralne depozitarne agencije AD Podgorica, i tu se ne računaju akcije u vlasništvu akcionara koji imaju preko 5%, osim investicionih i penzionih fondova, osiguravajućih društava i brokersko-dilerskih društava.

MONEX20 je cjenovni indeks koji se ne prilagođava za isplaćene dividende. Računa se u realnom vremenu, odmah nakon sklapanja poslova, u berzanskom sistemu trgovanja (BST) Montenegroberze. Početna vrijednost indeksa je 1000 poena i računa se od 01.03.2003. godine. Predmet je redovne i eventualne vanredne revizije, čije su mogućnosti precizno definisane unaprijed. Nakon revizije indeksa i promjene njegove strukture, vrijednost indeksa MONEX20 sa novim sastavom se počinje računati od prvog narednog dana trgovanja od dana revizije.

Izbor 20 emitenata čije akcije će ući u sastav indeksa vrši se na osnovu rangiranja po koeficijentu likvidnosti. Koeficijent likvidnosti se dobija po sledećem obrascu: (0.5 * procenat učešća prometa akcija pojedinačne hartije u ukupnom prometu akcija u posmatranom periodu + 0.5 * procenat učešća broja poslova pojedinačne hartije u

[96] Montenegro berza AD - http://www.montenegroberza.com.

ukupnom broju zaključenog broja poslova) * (broj dana trgovanja sa akcijama tokom posmatranog perioda / ukupan broj radnih dana posmatranog perioda).

Akcije dvadeset najbolje rangiranih kompanija po koeficijentu likvidnosti, ulaze u sastav indeksa MONEX20. Specijalno, berza zadržava pravo da u sastav indeksa uvrsti i akcije koje su rangirane po ovom uslovu i ispod dvadesetog mjesta, ako ocijeni da treba, ali samo pod uslovom da su te akcije unutar 30 prvorangiranih po koeficijentu likvidnosti.

Za određivanje učešća kompanija u sastav indeksa koristi se tržišna kapitalizacija koja se nalazi u slobodnom prometu (free float capitalization). Nakon što se odrede akcije koje se ne nalaze u slobodnom prometu, računa se free float factor (*FFc*) po formuli

$$FFc(\%) = 100\% - non \quad free \quad float\%,$$

i free float kapitalizacija koja se dobija množenjem faktora *FFc* i ukupne tržišne kapitalizacije. *FFc* se zaokružuje na najbližu vrijednost koja je djeljiva sa 5%. Ponderi (težinski koeficijenti) pojedinačne hartije u strukturi indeksa se određuju na osnovu učešća kapitalizacije pojedinačne kompanije u ukupnoj kapitalizaciji indeksa.

Formula računanja tržišnog indeksa MONEX20 je

$$MONEX\,20 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t} \cdot q_{i,R}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,0} \cdot q_{i,R}} \cdot 1000 \cdot C_T,$$

gdje je $p_{i,t}$ cijena *i*-te akcije na dan t, $p_{i,0}$ je bazna cijena *i*-te akcije na dan formiranja indeksa, $q_{i,R}$ je broj akcija u slobodnom prometu, i $C_T$ je korekcioni faktor za osiguranje kontinuiteta indeksa u trenutku prije kalkulacije indeksa po novom sastavu.

U tabeli 5.8. je prikazan sastav indeksa MONEX20 sa procentualnim učešćem emitenata u indeksu od aktuelne revizije na dan 15.09.2013.

**Tabela br. 5.8.** Sastav indeksa MONEX20 – 15.09.2013.

| Simbol | Naziv emitenta | % učešće u indeksu |
|---|---|---|
| TECG | Crnogorski Telekom AD Podgorica | 28.49% |
| EPCG | Elektroprivreda Crne Gore AD Nikšić | 16.57% |
| NKBA | Prva banka Crne Gore AD Nikšić | 9.95% |
| PLAP | 13. Jul Plantaže – AD Podgorica | 8.81% |
| JGPK | Jugopetrol AD Kotor | 8.81% |
| PREN | Crnogorski elektroprenosni sistem AD | 8.81% |
| KOGE | Kontejnerski terminali i generalni tereti | 6.95% |
| BUDR | HTP Budvanska rivijera | 3.10% |
| LUBA | Luka Bar AD Bar | 2.69% |
| RUPV | Rudnik uglja AD Pljevlja | 2.17% |
| SOBS | Solana Bajo Sekulić AD u stečaju Ulcinj | 1.70% |
| ZETP | Zetatrans AD Podgorica | 1.62% |
| INSM | Institut Simo Milošević AD Igalo | 1.23% |
| KAPG | Kombinat Aluminijuma AD Podgorica | 1.21% |
| JABD | Jadransko brodogradilište AD Bijela | 0.89% |
| ULRI | HTP Ulcinjska rivijera AD Ulcinj | 0.86% |
| ONOG | HTP Onogošt AD u stečaju Nikšić | 0.49% |
| PUTE | Barska plovidba AD Bar | 0.38% |
| INMR | CMC AD Podgorica | 0.34% |
| LUCG | Lutrija Crne Gore AD Podgorica | 0.25% |
| Ukupno | | 100% |

U nastavku se ocjenjuje parametar vrijednosti pri riziku tržišnog indeksa MONEX20, na osnovu različitih modela za jedno finansijsko sredstvo, kao i u slučaju jedne akcije, EPCG, u prethodnom dijelu.

### 5.2.2. Parametar vrijednosti pri riziku (VaR) tržišnog indeksa MONEX20

Prirodno je očekivati da dnevna stopa prinosa definisanog tržišnog indeksa koji obuhvata 20 najbitnijih akcija sa crnogorskog tžišta kapitala ima visok stepen volatilnosti i raspodjelu sa teškim repovima, kao što potvrđuje grafik 5.16. Njena empirijska raspodjela odstupa od normalne raspodjele, što je očigledno sa Q-Q dijagrama (grafik 5.17.) a na isti zaključak navode i elementarne test-statistike - koeficijent spljoštenosti i Žark-Bera test-statistika (JB). Ove deskriptivne statistike su date u tabeli 5.9. sa odgovarajućim *p*-vrijednostima u zagradama.

**Grafik 5.16.** Dnevna stopa prinosa tržišnog indeksa MONEX20

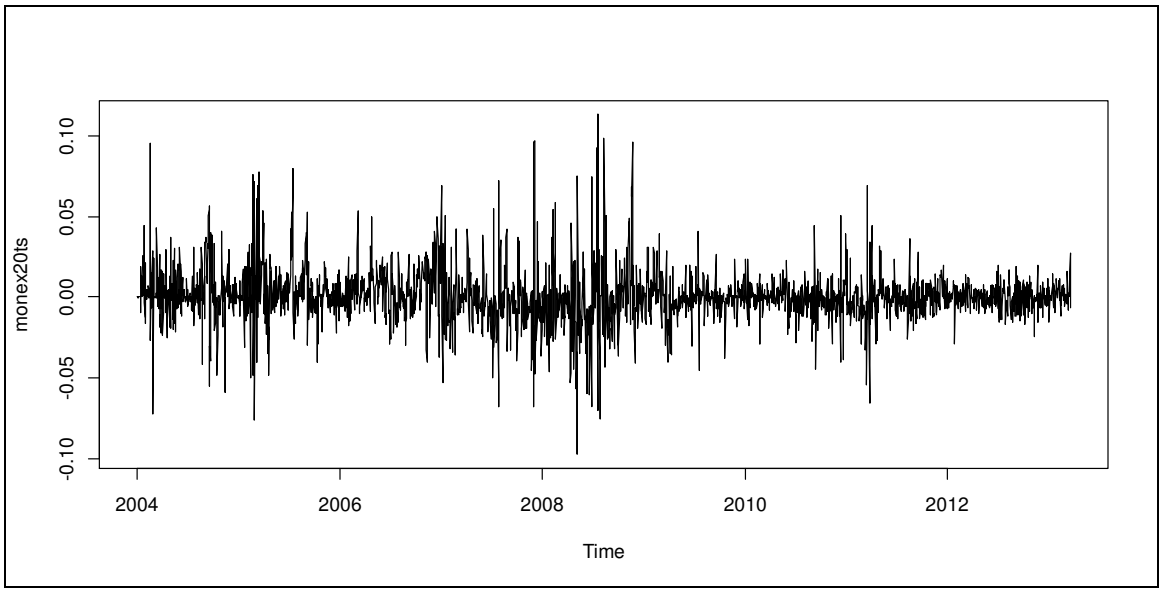
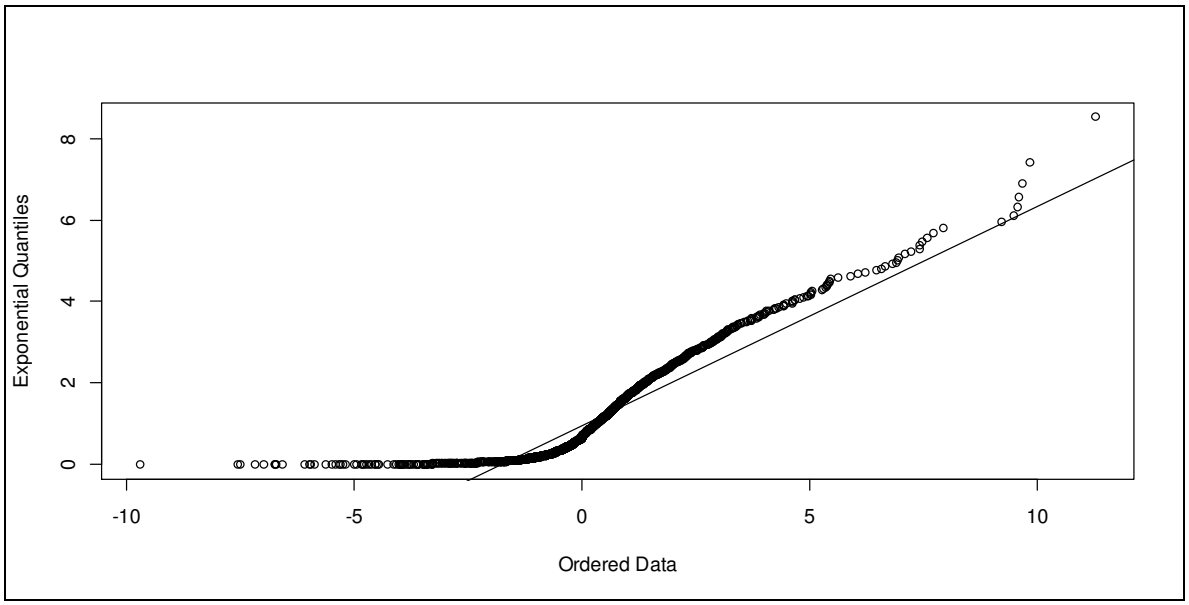



**Tabela 5.9.** Osnovne deskriptivne statistike dnevne stopa prinosa tržišnog indeksa MONEX20

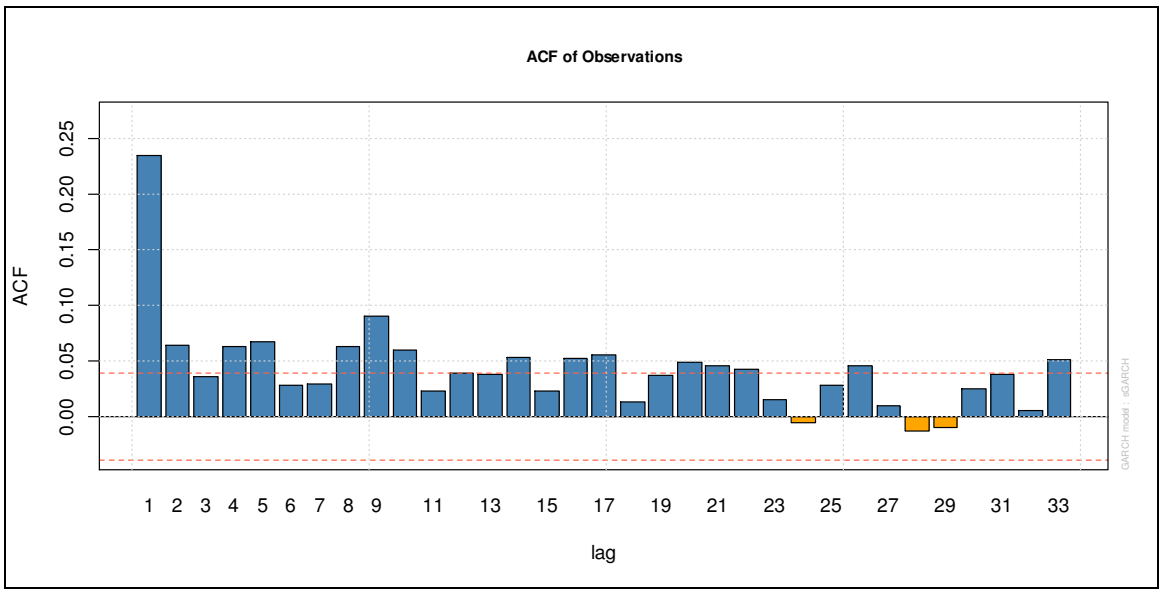
| Varijansa | Koef. asimetrije | Koef. spljoštenosti | JB | Box-Ljung (m=10) | Box-Ljung ($a_t^2$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.869291 | 0.686277 | 6.536753 | 4672.7013 (<2.2e-16) | 219.6358 (<2.2e-16) | 1003.793 (<2.2e-16) |

**Grafik 5.17.** Q-Q dijagram dnevne stopa prinosa tržišnog indeksa MONEX20 u odnosu na normalnu raspodjelu




Data serija prinosa nije izraženo asimetrična, što se vidi na osnovu koeficijenta asimetričnosti, ali do odstupanja od normalnosti dolazi zbog visokog koeficijenta spljoštenosti, što ukazuje na postojanje "teških repova" – repovi su teži od repova normalne raspodjele.

**Grafik 5.18.** Funkcije autokorelacije (ACF) za seriju MONEX20



S obzirom da dnevna stopa prinosa tržišnog indeksa MONEX20 ima nestabilnu varijansu, prirodno se nameće da se njena dinamika ocijeni pomoću GARCH modela. Na osnovu analize specifikacije – uzoračkih funkcija autokorelacije i parcijalne autokorelacije (grafici 5.18. i 5.19.) – procjenjuje se da je najbolji model ARMA(2,0). Kretanje volatilnosti se na najbolji način opisuje modelom GARCH(1,1) sa t raspodjelom (APARCH(1,1) model je imao signifikantne ocijenjene parametre, ali nije uspješno otklanjao autokorelaciju kao ni heteroskedastičnost).

Zajednički ocijenjeni ARMA(2,0)-GARCH(1,1) model glasi:

$$r_t = 0.14806 r_{t-1} + 0.07338 r_{t-1} + a_t,$$
$$\sigma_t^2 = 0.11691 a_{t-1}^2 + 0.88209 \sigma_{t-1}^2.$$

**Grafik 5.19.** Funkcije parcijalne autokorelacije za seriju MONEX20

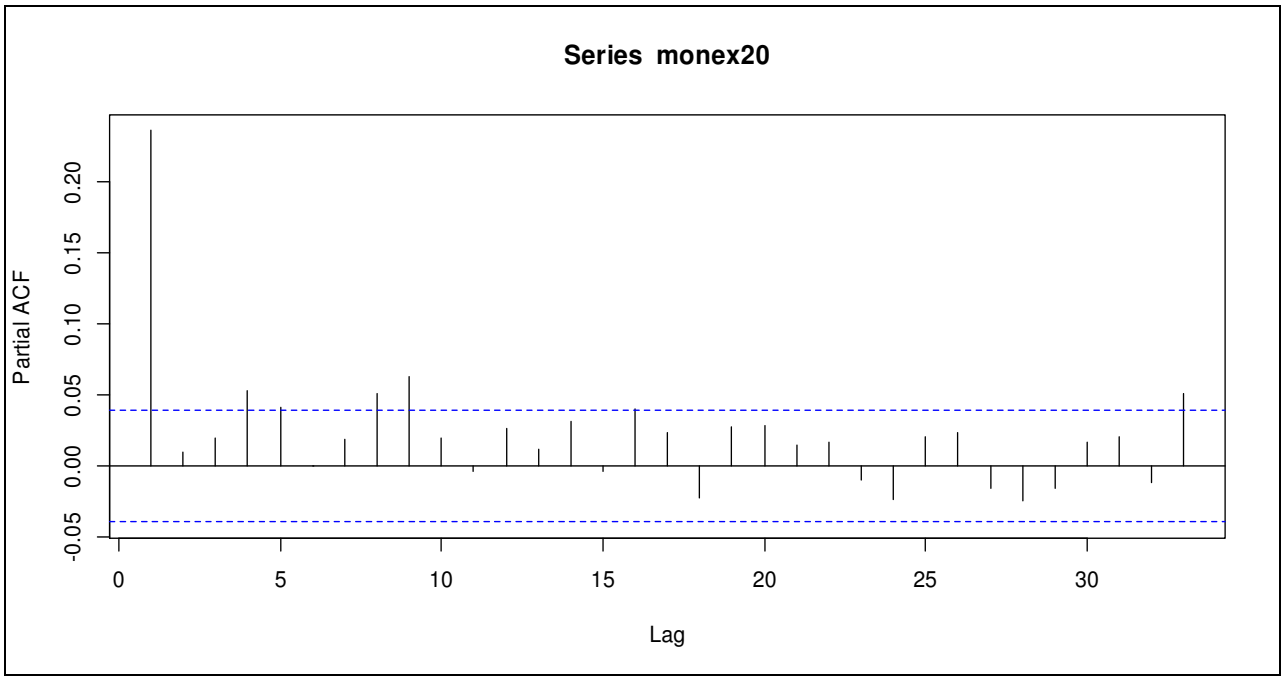
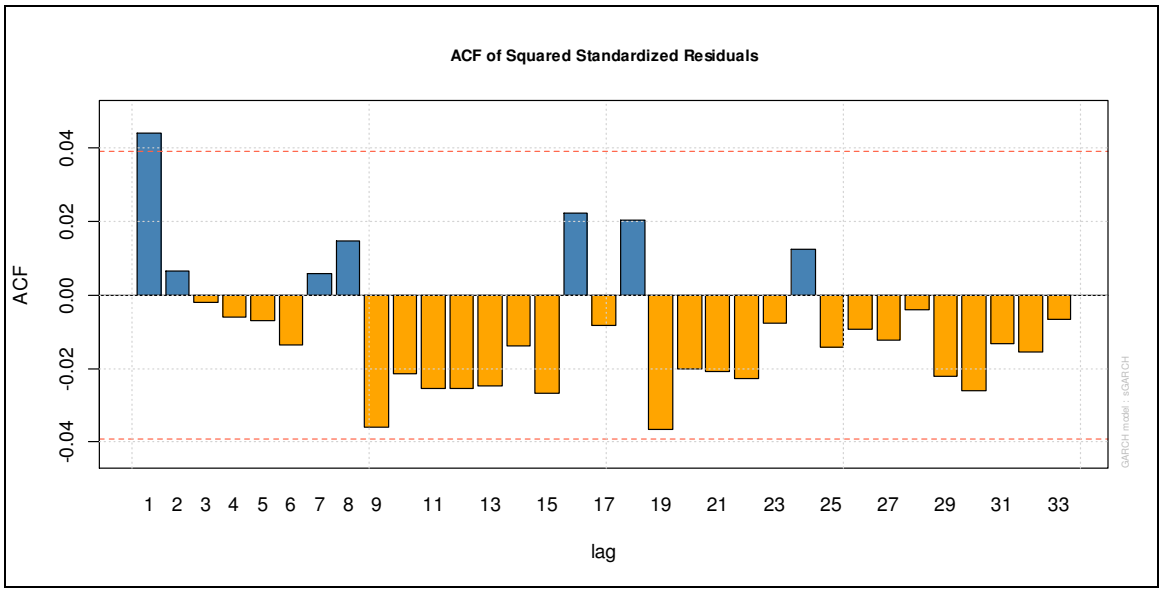


**Tabela 5.10.** Testovi ARMA(2,0)-GARCH(1,1) modela: test-statistike i *p*-vrijednosti

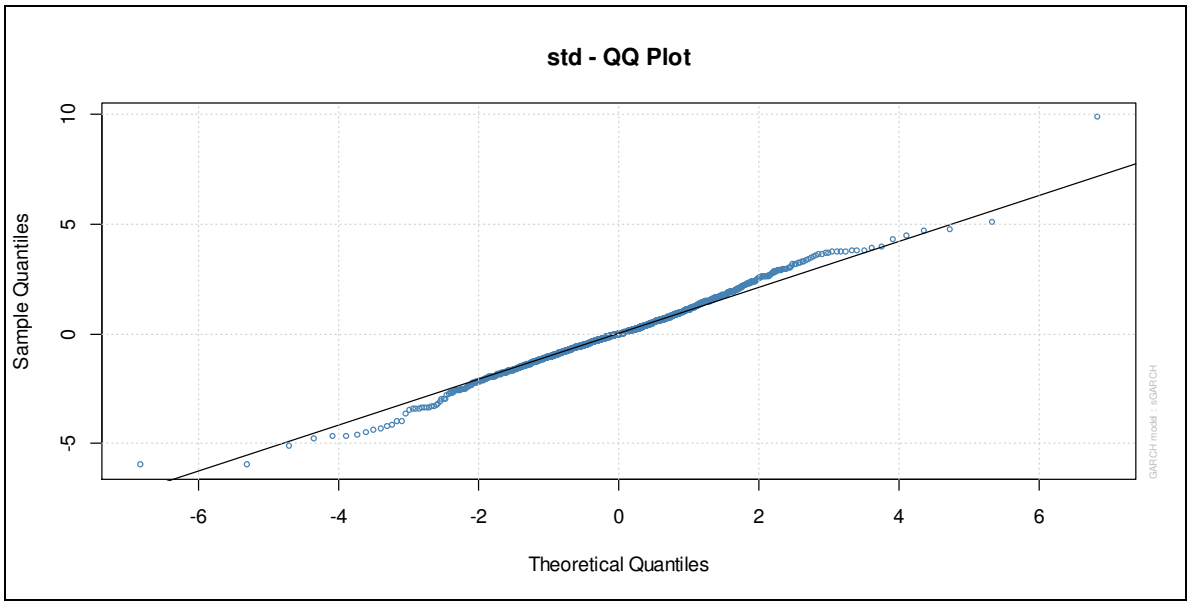
| Box-Ljung Q(7) | Box-Ljung ($a_t^2$) | LM ARCH Test |
|---|---|---|
| 18.079 (0.003) | 5.741 (0.33) | 10.448 (0.402) |

**Grafik 5.20.** Funkcije autokorelacije kvadriranih standardizovanih reziduala modela ARMA(2,0)-GARCH(1,1)




Rezidualni testovi autokorelacije i uslovne heteroskedastičnosti dati su u tabeli 5.10. Dakle, vidi se da izabrani model zaista dobro opisuje volatilnost i uspješno otklanja autokorelaciju, što se može vidjeti na osnovu Box-Ljungovog testa za kvadrirane standardizovane reziduale. Dakle, autokorelacija je dovoljno smanjena što se može i grafički vidjeti na osnovu funkcija autokorelacije kvadriranih standardizovanih reziduala, na grafiku 5.20. Na grafiku 5.21. je prikazan Q-Q dijagram standardizovanih reziduala koji prikazuju prilagođavanje datoj raspodjeli.

**Grafik 5.21.** Q-Q dijagram standardizovanih reziduala ocijenjenog modela ARMA(2,0)-GARCH(1,1)




U tabeli 5.11. date su prognoze stope prinosa i volatilnosti (uslovne standardne devijacije) za period od jedan do pet dana unaprijed, koje se koriste za ocjenu parametra vrijednosti pri riziku. Ocjene su izračunate za vjerovatnoće od 95% i 99%.

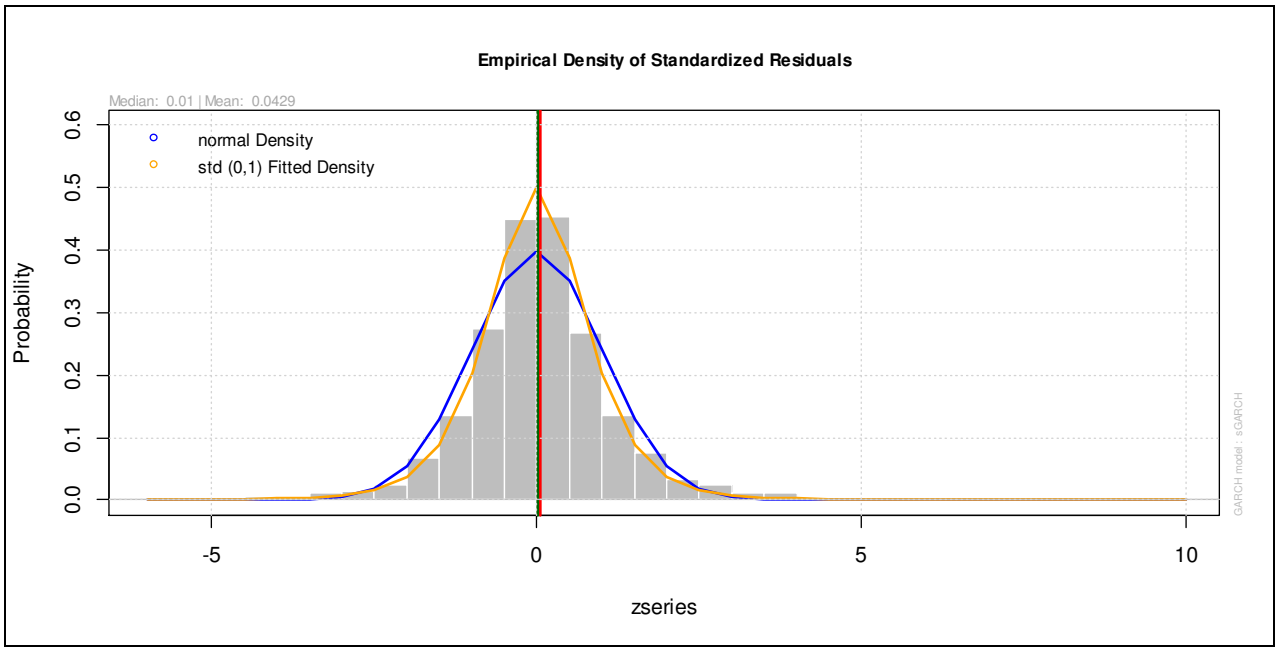
**Tabela 5.11.** Ekonometrijska ocjena VaR-a za period od 1-5 dana (stopa prinosa MONEX20)

| Period | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prognoza prinosa | -0.0005641 | -0.0005661 | -0.0001252 | -0.00006008 | -0.00001808 |
| Prognoza uslovne st. Dev. | 0.010087 | 0.010082 | 0.010077 | 0.010072 | 0.010066 |
| VaR(1,0.95) | 1.518% | 1.517% | 1.56% | 1.566% | 1.569% |
| VaR(1,0.99) | 2.573% | 2.571% | 2.614% | 2.62% | 2.622% |

Dobijeni rezultati parametra pri riziku se interpretiraju na sledeći način: ako se raspolaže akcijama u nekoj vrijednosti (npr. 1000 eura) na tržištu koje opisuje indeks MONEX20,

tada mogući gubitak za vlasnika akcija, u periodu od jednog dana, nije veći od 1.518% vrijednosti (15.18 eura) sa vjerovatnoćom od 95%. Sa vjerovatnoćom 99%, ocjena tog maksimalnog gubitka je 2.573% od vrijednosti (25.73 eura). Na kraju, dat je grafički prikaz (grafik 5.22.) empirijske raspodjele ocijenjenih standardizovanih reziduala, kao i poređenje sa normalnom raspodjelom, gdje je očigledno značajno odstupanje od normalne raspodjele, što se zaključilo na osnovu već navedenih grafika, statistika i testova.

**Grafik 5.22.** Empirijska funkcija gustine raspodjele standardizovanih reziduala ocijenjenog modela ARMA(2,0)-GARCH(1,1)




**Riskmetrics** metoda za računanje parametra VaR-a pretpostavlja, kao što je ranije navedeno, da je uslovna srednja vrijednost jednaka nuli, i da volatilnost prinosa prati IGARCH(1,1) model. Prilagođeni model glasi

$$r_t = a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = 0.079913\sigma_{t-1}^2 + (1-0.079913)a_{t-1}^2,$$

gdje je $\varepsilon_t$ standardna Gausova serija bijelog šuma. Q statistika za kvadrirane standardizovane reziduale iznosi 19.54 i statistički je značajna.

Na osnovu prilagođenog modela predviđena volatilnost za 1 period unaprijed je $\hat{\sigma}(1) = 0.00976$, pa je 95% kvantil uslovne raspodjele $1.65 \times 0.00976 = 0.016104$. VaR za vjerovatnoću od 95% za 1 period unaprijed za poziciju od npr. 1000 eura, biće

$$VaR = 1000€ \times 0.016104 = 16.104€.$$

Po istom principu, 99% kvantil je $2.326 \times 0.00976 = 0.02270176$, pa je parametar vrijednosti pri riziku, za datu vjerovatnoću približno 22.7€.

Dobijeni rezultati parametra pri riziku RiskMetrics metodom se interpretiraju na sledeći način: ako se raspolaže akcijama u nekoj vrijednosti (npr. 1000 eura) na tržištu koje opisuje indeks MONEX20, tada mogući gubitak za vlasnika akcija, u periodu od jednog dana, nije veći od 16.104 eura sa vjerovatnoćom od 95%. Sa vjerovatnoćom 99%, ocjena tog maksimalnog gubitka je 22.7 eura.

**Kvantilna ocjena** VaR-a se dobija kao empirijski 99% kvantil, čija je vrijednost za dnevnu stopu prinosa tržišnog indeksa MONEX20 4.722598%, odnosno u slučaju posjedovanja akcija u vrijednosti od 1000 eura na tržištu koje opisuje indeks MONEX20, maksimalni gubitak koji se može ostvariti, u periodu od jednog dana, nije veći od 47.226 eura, sa vjerovatnoćom od 99%. Mjera očekivani gubitak, uz istu vjerovatnoću iznosi 6.016041%, što znači da ako se prekorači vrijednost parametra vrijednosti pri riziku, u istom slučaju posjedovanja akcija na tržištu koje opisuje indeks MONEX20 u vrijednosti od 1000 eura, gubitak koji se očekuje u periodu od jednog dana je 60.16 eura. Uz nivo pouzdanosti od 95%, VaR iznosi 2.381442%, a mjera očekivanog gubitka je 3.765664%.

Sledeća ocjena parametra vrijednosti pri riziku odnosi se na **ocjenu na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti**. Najprije treba odrediti Hilovu ocjenu parametra oblika. Tabela 5.12. sadrži rezultate parametra oblika pomoću Hilove ocjene. U tabeli su data tri izbora za $q$, i kao što se može vidjeti, rezultati su stabilni bez obzira na variranje veličine $q$. Takođe, grafik 5.23. pokazuje dijagrame rasturanja Hilove ocjene sa intervalom

povjerenja od 95%. Očigledno je da ocjena raste sa porastom veličine $q$ i za pozitivne i za negativne logaritamske prinose. Dijagrami takođe ukazuju na činjenicu da su parametri oblika nešto veći za negativne prinose, što može biti znak da dnevni logaritamski prinosi imaju teži lijevi rep raspodjele. Rezultati, dakle, pokazuju da raspodjela dnevnih logaritamskih prinosa pripada Frešeovoj familiji raspodjela.

**Grafik 5.23.** Dijagrami rasturanja Hilove ocjene za dnevne stope prinosa indeksa Monex20, pozitivni i negativni prinosi

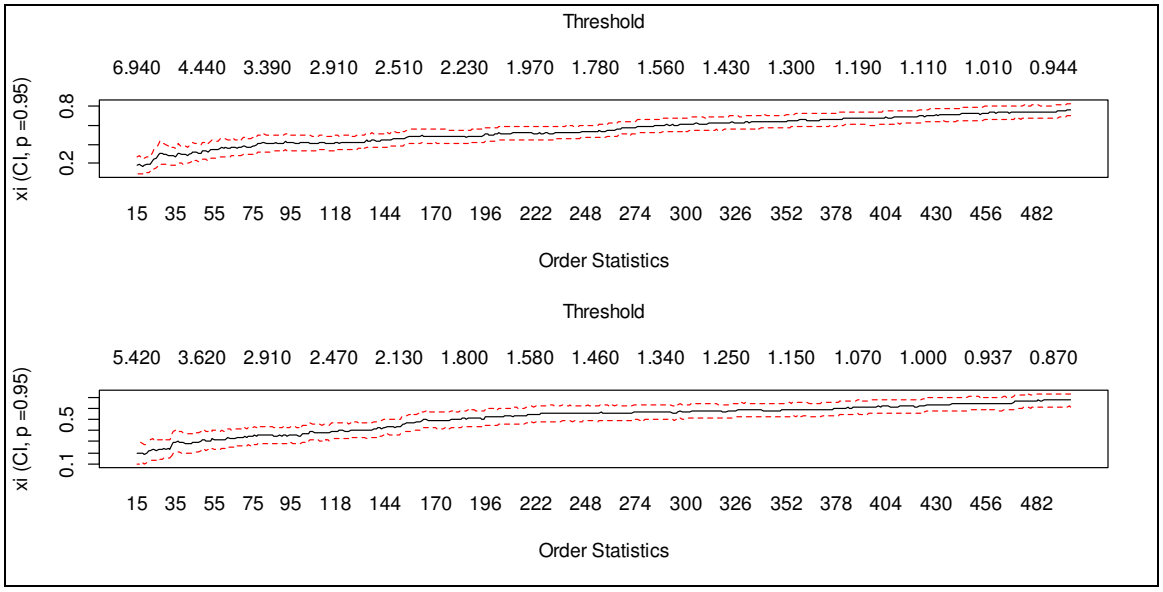



**Tabela 5.12.** Rezultati Hilove ocjene VaR-a za stopu prinosa tržišnog indeksa MONEX20[1]

| $q$ | 190 | 200 | 210 |
|---|---|---|---|
| $r_t$ | 0.489 (0.035) | 0.511 (0.036) | 0.522 (0.036) |
| $-r_t$ | 0.511 (0.037) | 0.522 (0.037) | 0.536 (0.037) |

[1]Standardne greške ocjena date su u zagradama.

Za ocjenu parametara uopštene raspodjele ekstremnih vrijednosti koristimo metod maksimalne vjerodostojnosti. U tabeli 5.13. date su ocjene rezultata pri različitim vrijednostima izabranih podperioda, od jednog mjeseca ($n$=21), do pola godine ($n$=126). Na osnovu dobijenih rezultata, možemo zaključiti da:

- Ocjene parametara $\alpha_n$ i $\beta_n$ se povećavaju sa porastom veličine podperioda *n*, što se i očekivalo;
- Ocjene parametra oblika se smanjuju i postaju stabilne sa porastom veličine *n*;
- Ocjene parametra oblika su manje stabilne kod pozitivnih prinosa, i
- Standardne greške ocjena se značajno povećavaju sa porastom broja *n*.

**Tabela 5.13.** Ocjene parametara raspodjele ekstremne vrijednosti dobijene metodom maksimalne vjerodostojnosti za dnevne logaritamske prinose tržišnog indeksa MONEX20[1]

| Veličina podperioda | $\alpha_n$ | $\beta_n$ | $\gamma_n$ |
|---|---|---|---|
| | *Minimalni prinosi* | | |
| Mjesec (*n*=21, *g*=120) | 1.021 (0.099) | 1.68 (0.113) | 0.354 (0.107) |
| Kvartal (*n*=63, *g*=40) | 1.493 (0.212) | 2.945 (0.277) | 0.07 (0.153) |
| Polugod. (*n*=126, *g*=20) | 1.676 (0.362) | 3.694 (0.464) | 0.02 (0.27) |
| | *Maksimalni prinosi* | | |
| Mjesec (*n*=21, *g*=120) | 1.166(0.11) | 1.933 (0.126) | 0.368 (0.098) |
| Kvartal (*n*=63, *g*= 40) | 1.763 (0.287) | 3.466 (0.351) | 0.181 (0.205) |
| Polugod. (*n*=126, *g*=20) | 2.583 (0.604) | 4.581 (0.746) | -0.165 (0.317) |

[1]Standardne greške ocjena date su u zagradama.

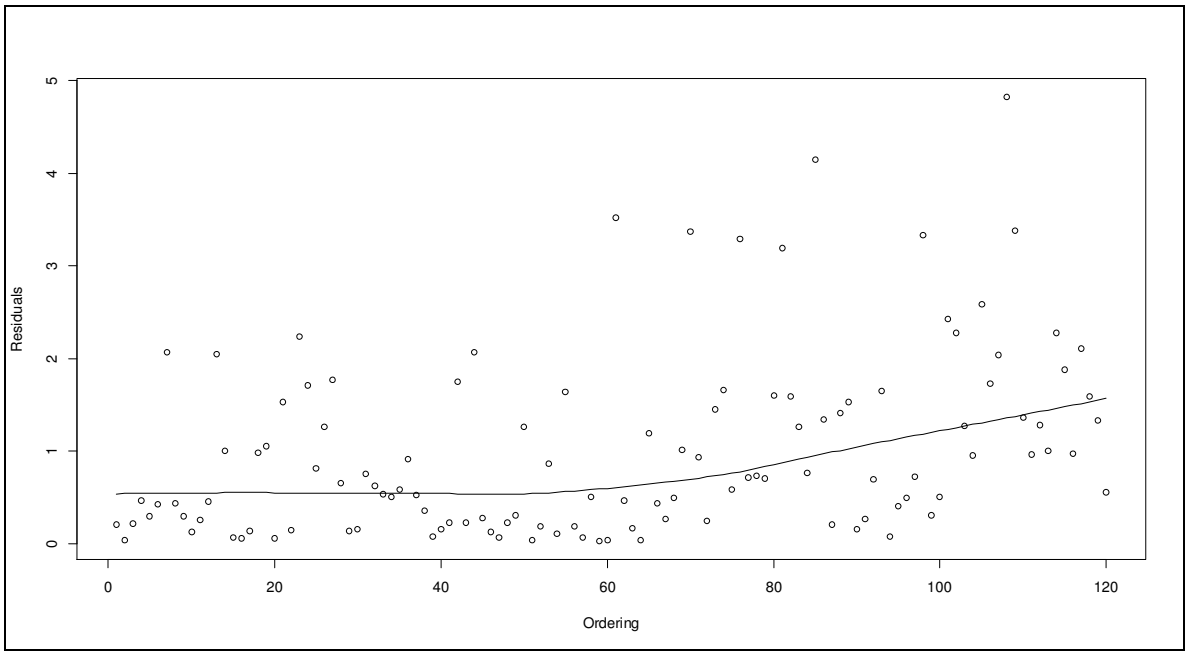
Koristeći funkciju gustine vjerovatnoće uopštene raspodjele ekstremnih vrijednosti, može se pokazati da reziduali te raspodjele treba da formiraju slučajan uzorak eksponencijalno raspodijeljenih slučajnih promjenljivih ako je prilagođeni model ispravno specificiran. Grafik 5.24. upravo pokazuje dijagram rasturanja reziduala uopštene raspodjele ekstremnih vrijednosti prilagođenih dnevnim negativnim logaritamskim prinosima za podperiod od 21 dana. Grafik 5.25. predstavlja Q-Q dijagram istih reziduala naspram eksponencijalne raspodjele, pa se na osnovu njih vidi da je prilagođenost dobra.

Parametar VaR se sada računa na osnovu formule (3.23). Pri riziku greške od 1%, odgovarajuća vrijednost parametra, za negativne prinose i $n$=63, na osnovu podataka iz tabele 5.13., je

$$VaR = 2.945 - \frac{1.493}{0.07}\left\{1 - \left[-63\ln(1-0.01)\right]^{-0.07}\right\} = 3.638354.$$

Interpretacija ovog rezultata je sledeća: u slučaju posjedovanja akcija koje opisuje tržišni indeks MONEX20 u vrijednosti od npr. 1000 eura, gubitak koji se može ostvariti, u periodu od jednog dana, i veličinu podperioda od 63 dana, nije veći od 36.38354 eura, sa vjerovatnoćom od 99%.

**Grafik 5.24.** Dijagram rasturanja reziduala za prilagođavanje raspodjeli ekstremnih vrijednosti za dnevne negativne logaritamske prinose indeksa MONEX20, za podperiode od 21 dan

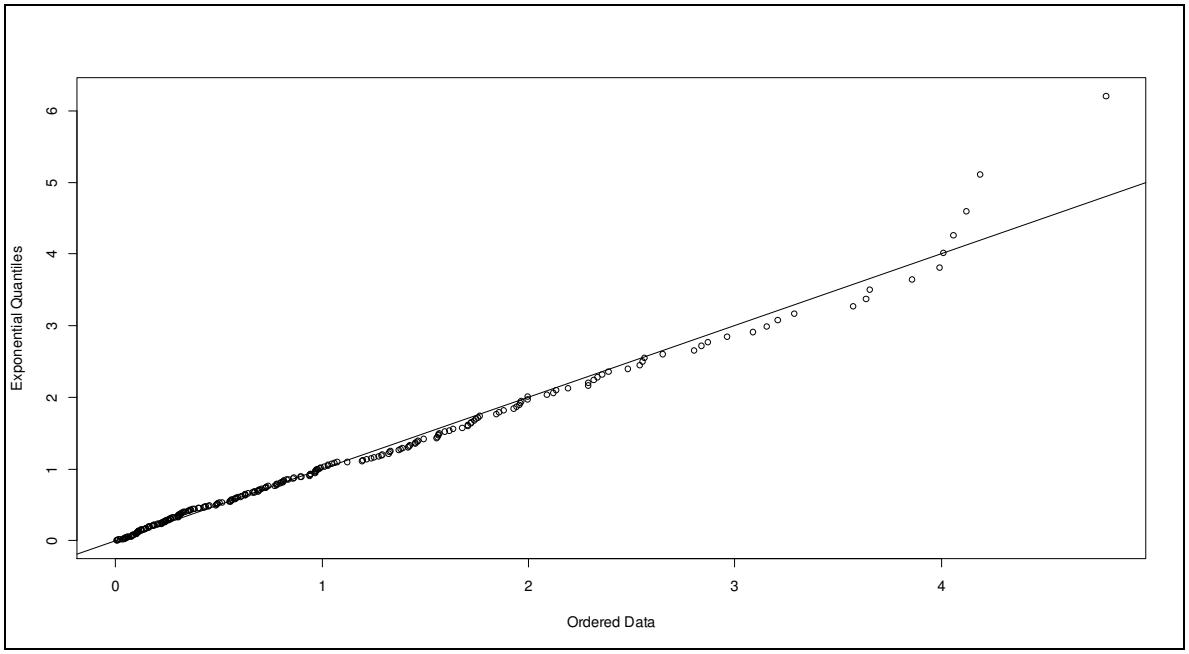



Ako uzmemo u obzir veličinu podperioda od 21 dana, tada je VaR pri istom riziku greške za negativne prinose

$$VaR = 1.68 - \frac{1.021}{0.354}\left\{1 - \left[-21\ln(1-0.01)\right]^{-0.354}\right\} = 3.79829.$$

Analogno, po istoj formuli, se dobijaju vrijednosti parametra VaR pri riziku greške od 5%, koje ćemo takođe koristiti za komparaciju rezultata na osnovu različitih modela. Pri veličini podperioda od 21 dana, uz rizik greške od 5%, VaR za negativne prinose iznosi 1.6051.

**Grafik 5.25.** Q-Q dijagram reziduala za prilagođavanje raspodjeli ekstremnih vrijednosti za dnevne negativne logaritamske prinose indeksa MONEX20, za podperiode od 21 dan

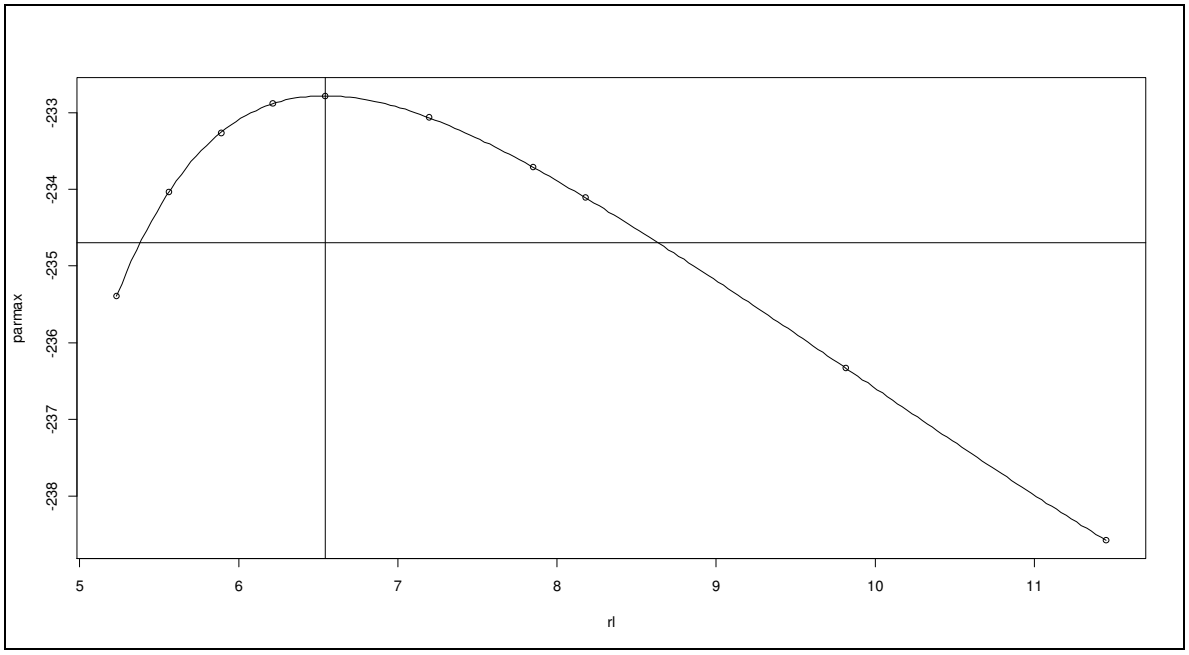



Na osnovu formule (3.32) se može dati i procjena parametra vrijednosti pri riziku za duži vremenski period. Npr. pri riziku greške od 1%, za $n$=63, odgovarajuća vrijednost parametra VaR za jedan period je 3.638354. To, kao što je već interpretirano, znači da ako posjedujemo akcije na tržištu koje opisuje indeks MONEX20 u vrijednosti od 1000€, maksimalni gubitak za sledeći dan trgovanja je 36.38354€. Odgovarajuća vrijednost parametra za vremenski horizont od 30 dana bila bi

$$VaR(30) = 30^{0.07} VaR = 1.2688 * 36.38354 = 46.163455.$$

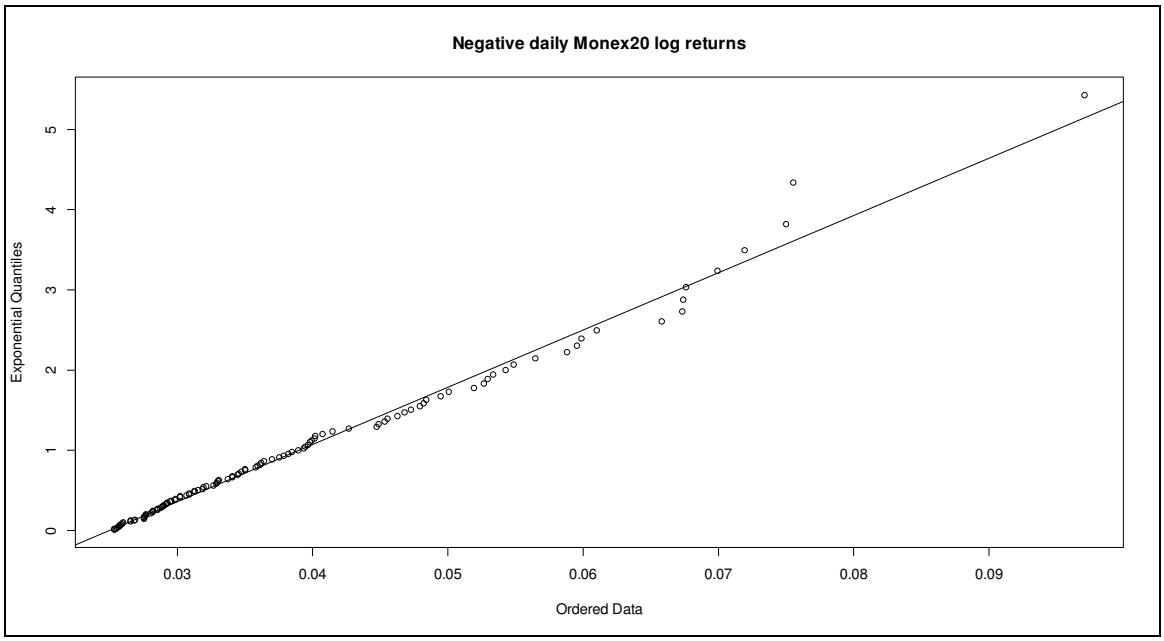
Nivo prinosa za 12 podperioda, za dnevne negativne logaritamske prinose indeksa MONEX20, na osnovu podperioda od 21 dan, može se ocijeniti na osnovu prilagođenog modela i iznosi 6.544%. Na grafiku 5.26. je predstavljena intervalna ocjena mjere nivoa prinosa za dnevne negativne logaritamske prinose indeksa MONEX20, na osnovu podperioda od 21 dan.

**Grafik 5.26.** Grafik intervala povjerenja za nivo prinosa tržišnog indeksa MONEX20 (na osnovu logaritmovane funkcije vjerodostojnosti)




Kako su repovi empirijske raspodjele stope prinosa indeksa MONEX20 teži od repova normalne raspodjele, prelazimo na ocjenu parametra vrijednosti pri riziku na osnovu novog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti – **metoda vrhova iznad datog praga**. Razmatraju se negativni logaritmovani prinosi tržišnog indeksa MONEX20, čiji je Q-Q dijagram prekoračenja iznad datog praga 2.5% prikazan na grafiku 5.27. Vrijednost praga *u* smo izabrali na osnovu grafika 5.28. gdje je prikazana funkcija srednjeg prekoračenja. Navedena funkcija srednjeg prekoračenja pokazuje tendenciju linearnog rasta od nivoa praga najviše od 3%, pa smo sproveli analizu za 3 vrijednosti praga: 2%, 2.5% i 3%.

**Grafik 5.27.** Q-Q dijagram prekoračenja iznad datog praga 2.5% za dnevne negativne logaritamske prinose tržišnog indeksa MONEX20




**Grafik 5.28.** Funkcija srednjeg prekoračenja za dnevne negativne logaritamske prinose tržišnog indeksa MONEX20

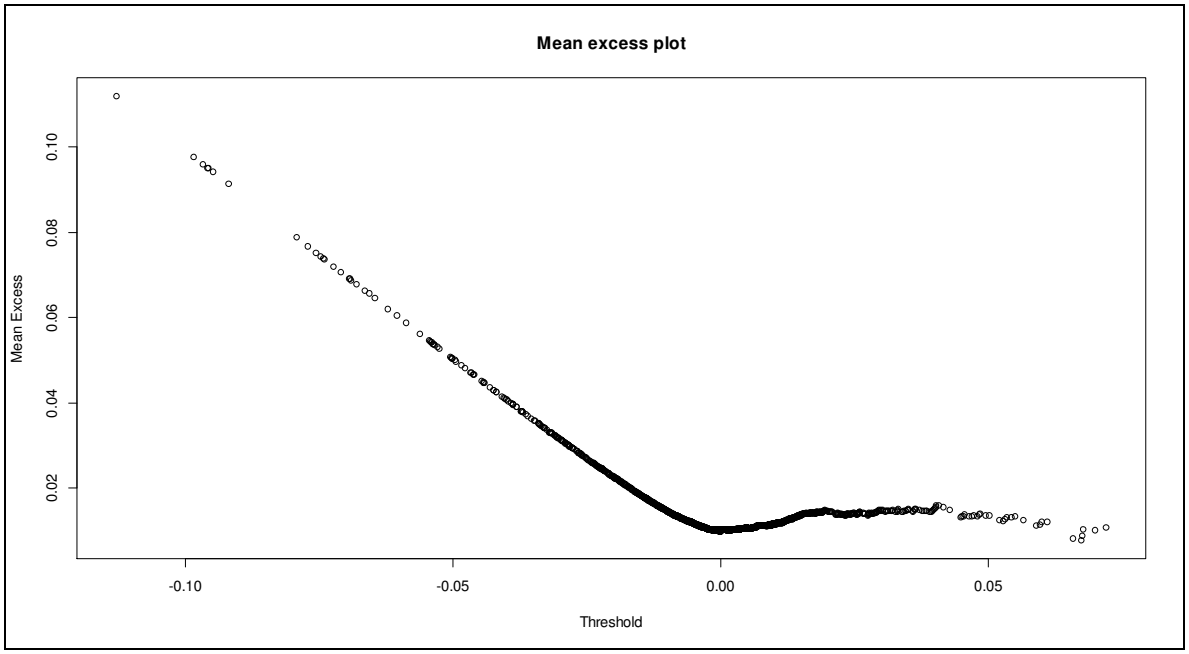


**Tabela 5.14.** Ocjene rezultata dvodimenzionog Poisson-ovog modela dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa tržišnog indeksa MONEX20[1]

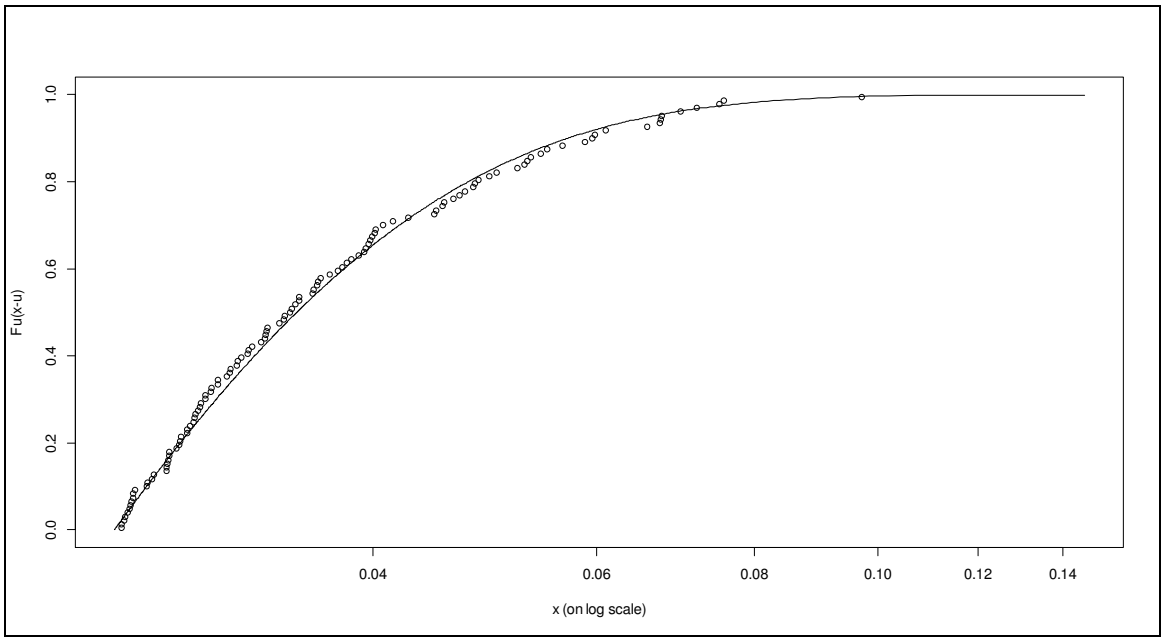
| Prag | Prekoračenja | $\gamma_n$ | $\alpha_n$ | $\beta_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 3% | 77 | -0.103 (0.08) | 0.0229 (0.008) | -0.037 (0.015) |
| 2.5% | 115 | -0.026 (0.066) | 0.0155 (0.004) | -0.021 (0.008) |
| 2% | 160 | -0.051 (0.059) | 0.0174 (0.004) | -0.025 (0.006) |

[1]Standardne greške ocjena date su u zagradama.

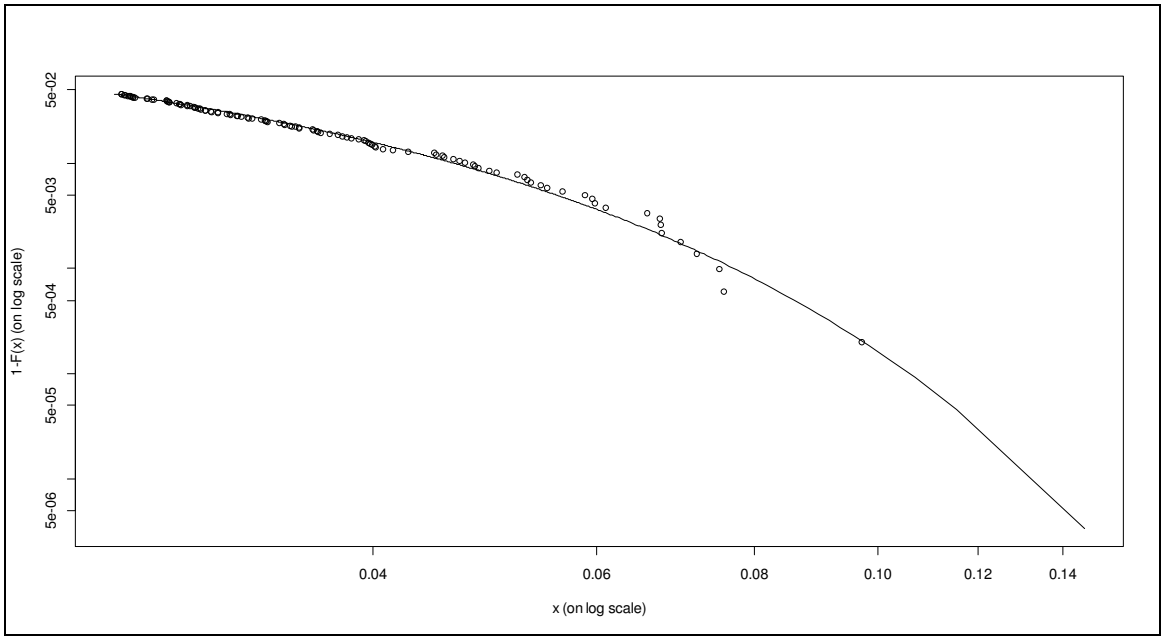
Skupovi ekstremnih događaja podataka prinosa koji premašuju navedene vrijednosti praga od 2%, 2.5% i 3%, imaju 160, 115 i 77 podataka, respektivno. Na bazi tih skupova podataka se modelira raspodjela maksimuma negativnih logaritmovanih prinosa indeksa MONEX20. Tabela 5.14. sadrži ocjene parametara $\gamma$, $\alpha$ i $\beta$ za date skupove podataka, uz navedeno variranje praga od 2% do 3%.

Visok stepen objašnjenosti empirijske funkcije raspodjele maksimuma negativne stope prinosa uopštenom Pareto raspodjelom potvrđuju odgovarajući grafički prikazi – grafici 5.29. i 5.30. Naime, grafik 5.29. pokazuje prilagođenost prekoračenja (originalnih podataka) navedenoj raspodjeli, dok grafik 5.30. pokazuje prilagođavanje repa raspodjele originalnim vrijednostima. Dodatno, grafik 5.31. sadrži dijagram rasturanja reziduala, i konačno, grafik 5.32. predstavlja Q-Q dijagram na kome su ucrtani parovi empirijskih kvantila koji prate pravu liniju. S obzirom na činjenicu da se parovi kvantila za ocijenjenu raspodjelu nalaze na aproksimativno pravoj liniji, i na osnovu ovog pokazatelja zaključujemo da je maksimum negativne stope prinosa indeksa MONEX20 odlično modeliran.

**Grafik 5.29.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa tržišnog indeksa MONEX20



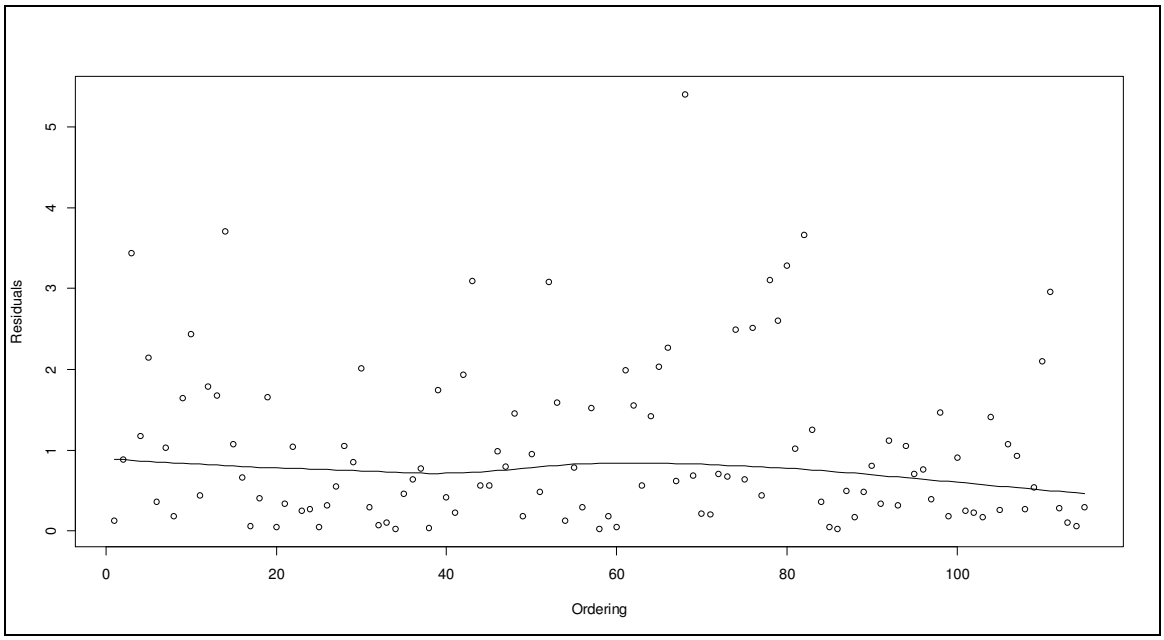

**Grafik 5.30.** Dijagram prilagođavanja repa uopštene Pareto raspodjele raspodjeli prekoračenja dnevnih negativnih logaritmovanih prinosa tržišnog indeksa MONEX20




Metod vrhova iznad datog praga daje rezultate za vrijednosti parametra pri riziku i očekivanog gubitka koji su sumirani u tabeli 5.15. Zaključuje se da su rezultati

parametara stabilniji u odnosu na tradicionalni pristup teorije ekstremnih vrijednosti, kod kojeg su izražene varijacije ocjena parametara u zavisnosti od izbora veličine podperioda *n*. Ovdje je evidentno da se rezultati VaR-a i očekivanog gubitka manje razlikuju u zavisnosti od različitih vrijednosti praga prekoračenja, a pri istoj vjerovatnoći ocjene. Samim tim, opšti zaključak je da je ovaj pristup superiorniji u odnosu na tradicionalni pristup teorije ekstremnih vrijednosti. Komparacija rezultata svih ilistrovanih modela slijedi u narednom dijelu.

**Grafik 5.31.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele dnevnim negativnim logaritmovanim prinosima indeksa MONEX20 – dijagram rasturanja reziduala



**Grafik 5.32.** Dijagram prilagođavanja uopštene Pareto raspodjele dnevnim negativnim logaritmovanim prinosima indeksa MONEX20 – Q-Q dijagram reziduala

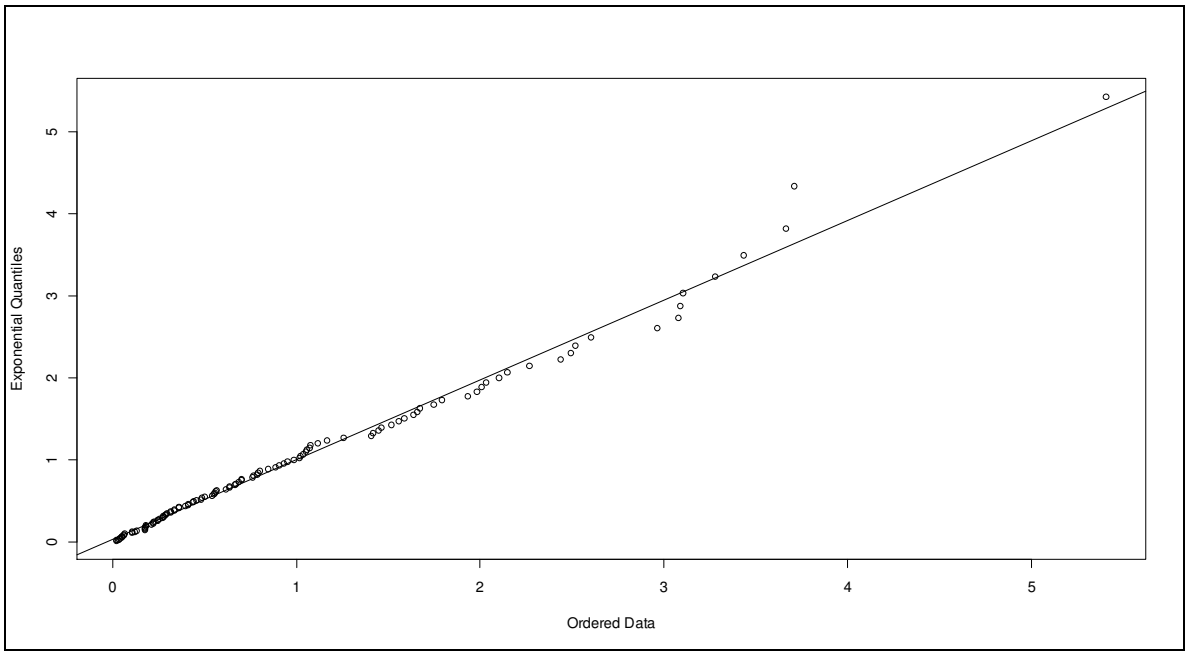



**Tabela 5.15.** Ocjene rezultata vrijednosti parametra pri riziku i očekivanog gubitka na osnovu metoda vrhova iznad datog praga za seriju MONEX20

| *Prag* | *p*-vrijednost | VaR | Očekivani gubitak |
|---|---|---|---|
| 2.5% | 0.05 | 0.02376140=2.38% | 0.03772221=3.77% |
| | 0.01 | 0.04633860=4.63% | 0.05972934=5.97% |
| | 0.001 | 0.07704574=7.7% | 0.08966113=8.97% |
| 2% | 0.05 | 0.02365178 =2.36% | 0.03782005=3.78% |
| | 0.01 | 0.04666118 =4.67% | 0.05970886=5.97% |
| | 0.001 | 0.07645226 =7.65% | 0.08804908=8.8% |
| 3% | 0.05 | 0.02196079 =2.2% | 0.03728750=3.73% |
| | 0.01 | 0.04703223 =4.7% | 0.06002516=6.002% |
| | 0.001 | 0.07641189 =7.64% | 0.08667001=8.67% |

### 5.2.2. Komparativna analiza rezultata jednodimenzionog modela (tržišni indeks MONEX20)

U cilju komparacije rezultata, sumiraćemo ocijenjene vrijednosti parametra pri riziku dobijene različitim metodama računanja. Ako posjedujemo akcije koje opisuje tržišni indeks MONEX20 u vrijednosti od 1000€, uz vjerovatnoću od 5%, što znači da je 95% vjerovatno da će gubitak biti manji ili jednak VaR-u za sledeći dan trgovanja, rezultati parametra su sledeći:

- 15.18€ primjenom ARMA(2,0)-GARCH(1,1) modela;
- 16.104€ primjenom RiskMetrics metode;
- 23.82€ kvantilnom ocjenom;
- 16.051€ primjenom tradicionalne teorije ekstremnih vrijednosti (veličina podperioda je 21 dan);
- 23.8€ primjenom novog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti – metod vrhova iznad datog praga (prag je 2.5%).

Odgovarajuće ocijenjene vrijednosti parametra uz vjerovatnoću od 1% su:

- 25.73€ primjenom ARMA(2,0)-GARCH(1,1) modela;
- 22.7€ primjenom RiskMetrics metode;
- 47.226€ kvantilnom ocjenom;
- 37.983€ primjenom tradicionalne teorije ekstremnih vrijednosti (veličina podperioda je 21 dan);
- 46.34€ primjenom novog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti – metod vrhova iznad datog praga (prag je 2.5%).

Zbog različitog tretiranja u ocjenjivanju ponašanja repa statističke raspodjele nastaju i razlike u primijenjenim pristupima. Pošto se radi o stopi prinosa tržišnog indeksa koji ima manje izražen varijabilitet od pojedinih akcija koje ulaze u njegov sastav, razlike u ocjenama parametra vrijednosti pri riziku na osnovu navedenih modela su manje.

Vrijednosti ocijenjenog parametra se grupišu u 2 skupa – manje ocjene daju GARCH model, metoda RiskMetrics i tradicionalni pristup teorije ekstremnih vrijednosti (metod blokova), na jednoj strani, u odnosu na metod vrhova iznad datog praga i kvantilnu ocjenu, na drugoj strani. Takođe, treba naglasiti da se sa porastom nivoa povjerenja na 99%, tradicionalna ocjena na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti značajno popravlja, ali opet ne prevazilazi kvantilnu ocjenu i novi pristup teorije ekstremnih vrijednosti.

Rezultat ekonometrijskog ocjenjivanja (ARMA-GARCH modeli i RiskMetrics), pod uslovom da su sve pretpostavke za njihovu primjenu ispunjene, zavisi od izabranog modela. Zbog toga je neophodno, kao što smo i na primjeru pokazali, da detaljna analiza specifikacije potencijalnih modela predstavlja prvu fazu u izvođenju ocjene parametra vrijednosti pri riziku. U ovom posmatranom slučaju te ocjene su manje od ocjena parametra dobijenih na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti, a pošto se radi o ekstremnom gubitku koji se ne može realno izmjeriti, uvijek je bolji model koji nam daje „bolji oprez“.

Opet se potvrđuje da važnu ulogu u računanju VaR-a ima i izbor vjerovatnoće repa raspodjele. Veličina posmatranog uzorka od 2508 podataka može se smatrati dovoljno velikom da empirijski kvantili sa vjerovatnoćom od 99% i 95% daju dobre ocjene kvantila raspodjele prinosa. U slučaju oba nivoa rizika greške kvantilna ocjena parametra vrijednosti pri riziku je veoma bliska ocjeni na osnovu novog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti. Drugim riječima, ne treba zanemariti jednostavno ocjenjivanje parametra vrijednosti pri riziku putem kvantila raspodjele istorijskih podataka, kada raspolažemo sa velikim brojem podataka.

Treba naglasiti da period posmatranja stope prinosa tržišnog indeksa MONEX20 obuhvata period finansijske krize, a poznato je da je, u takvim uslovima, investitorima veoma važno da lociraju rizik i izmjere ga na najbolji mogući način. Posebno je izražen uticaj ekstremnih događaja na kretanje finansijskih tržišta zemalja u razvoju, pošto su takva tržišta mnogo manje likvidna i i imaju značajno manju tržišnu kapitalizaciju. Stoga je neophodno testirati VaR metodologiju, koja je prvenstveno razvijena za likvidna i

razvijena tržišta, na tržištima u razvoju, koja pokazuju ekstremnu volatilnost i nelikvidnost. Zbog takvih uslova, izražena je potreba za modeliranjem repa raspodjele kod primjene na ovim tržištima, pa otuda i objašnjenje zašto teorija ekstremnih vrijednosti daje bolje rezultate parametra VaR. Naravno, kada se posmatra zbirni tržišni indeks, kao što je MONEX20, koji ima manju varijansu od pojedinačnih akcija, tada su i razlike ocijenjenog parametra na bazi navedenih metoda manje izražene.

### 5.3. Modeliranje VaR-a određenog portfolija primjenom različitih metoda

Ovaj dio rada odnosi se na empirijsku primjenu metoda višedimenzionih ekonometrijskih modela za kvantifikovanje tržišnog rizika. Ilustruje se primjena uopštenih ortogonalnih GARCH metoda na portfolio sačinjen od dvije akcije – Telekom Crne Gore (TECG) i Elektroprivrede Crne Gore (EPCG). Posmatrani period je od 9.01.2004. do 18.06.2013. Dakle, radi se o bivarijantnom modelu sa 2338 podataka po jednoj promjenljivoj. Ove dvije akcije posebno su interesantne jer predstavljaju najlikvidnije akcije na crnogorskom tržištu (kao što se može vidjeti i u tabeli 5.8. ove dvije akcije imaju najveće učešće u formiranju tržišnog indeksa MONEX20).

**Tabela 5.16.** Osnovne deskriptivne statistike dnevne stope prinosa akcija TECG

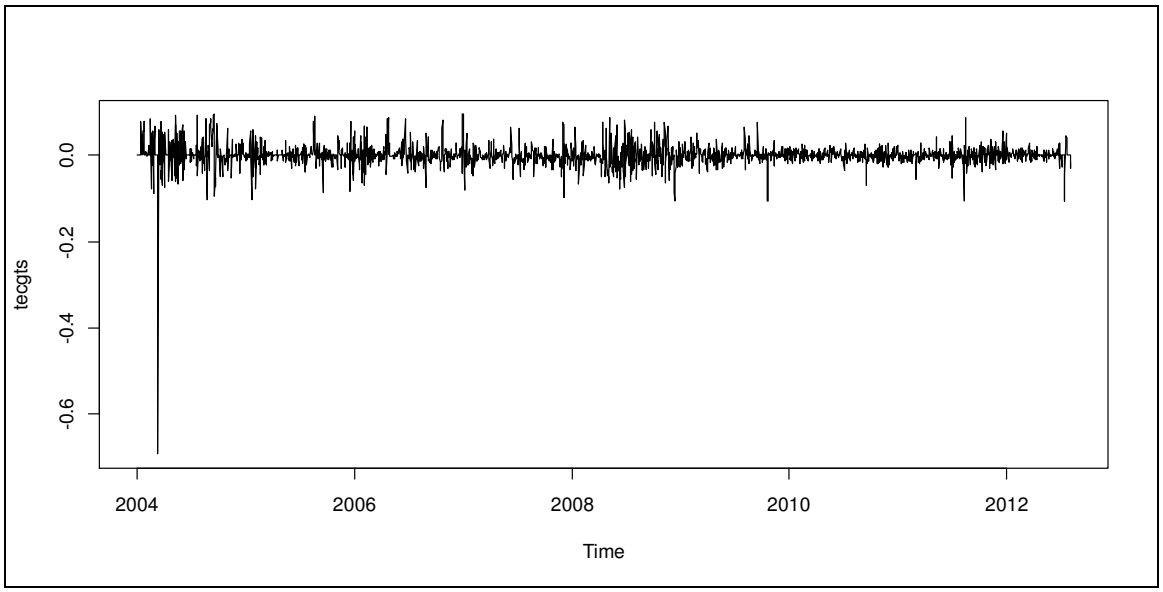
| Varijansa | Koef. asimetrije | Koef. spljoštenosti | JB | Box-Ljung (m=8) | Box-Ljung ($a_t^2$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 7.319 | -7.043 | 186.047 | 3397166.92 (<2.2e-16) | 8.9476 (0.3467) | 1.2924 (0.9956) |

Tabela 5.16. sumira osnovnu deskriptivnu statistiku serije dnevnih logaritmovanih prinosa akcije TECG. Koeficijenti asimetrije i spljoštenosti jasno pokazuju da se radi o seriji koja odstupa od normalne raspodjele, kao i Žark-Bera test-statistika (JB). Za razliku od serije prinosa druge akcije koju smo analizirali u prethodnom dijelu (EPCG), ova serija ima jako izraženu asimetriju, kao i teške repove – spljoštenost. Međutim, poslednje dvije statistike u tabeli - Boks-Ljungova test-statistika i Boks-Ljungova test-statistika na

kvadrirane reziduale serije – ukazuju da u ovoj seriji nema autokorelacije, niti visokog vremenski promjenljivog varijabiliteta. Naime, nulta hipoteza kod Boks-Ljungovog testa se ne može odbaciti, što znači da su prvih *m*=8 autokorelacionih koeficijenata kvadriranih podataka jednaki nuli.

Ako grafik 5.33. pokazuje vremensku seriju dnevnih logaritmovanih prinosa akcije TECG, očigledno je da na samom startu serije (prvi dio 2004. godine) postoji izražena ekstremna vrijednost. Ukoliko bi se data vrijednost eliminisala iz analize, pretpostavlja se da bi i navedena serija tada pokazala izraženiju volatilnost. Međutim, kako se radi o portfoliju dvije akcije, odustalo se od tog koraka, da bi se vidjelo do kojih će rezultata dovesti ovakav slučaj, kao i zbog činjenice da druga serija nema ekstremnih vrijednosti koje bi uticale na rezultate. Naravno, za dalji rad bi svakako bilo korisno ispitati i situaciju uklanjanja ekstremne vrijednosti i komparaciju rezultata, ali to prevazilazi cilj ove disertacije.

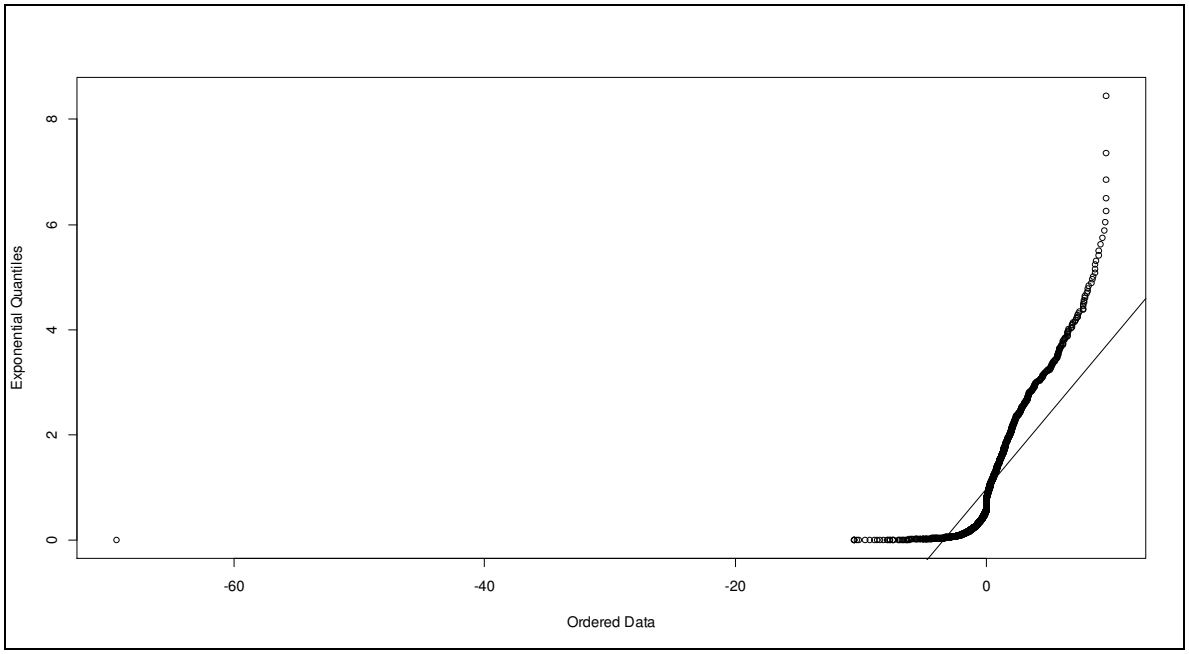
**Grafik 5.33.** Vremenska serija dnevnih logaritmovanih prinosa akcije TECG




Na grafiku 5.34. predstavljen je Q-Q dijagram dnevne stopa prinosa akcija TECG u odnosu na normalnu raspodjelu, na kom se potvđuje značajno odstupanje empirijske raspodjele od normalne raspodjele i postojanje „teških repova“. I sa ovog grafika je očigledno postojanje izražene ekstremne vrijednosti na početku serije.

Modelirani su dnevni logaritmovani prinosi portfolija (dvije akcije) pomoću uopštenog ortogonalnog GARCH modela. Naime, ovaj model primjenjuje ortogonalizaciju posmatranih promjenljivih, na koje onda primjenjuje GARCH(1,1) model konstantne korelacije, što se u prethodnom poglavlju navelo kao moguće rješenje razmatranog problema modeliranja parametra vrijednosti pri riziku za portfolio koji sadrži dvije ili više finansijskih pozicija. Parametri navedenog modela su ocijenjeni na 3 načina: pomoću metoda momenata - MM (koji je detaljno objašnjen u teorijskom dijelu), metoda nelineranih najmanjih kvadrata (NLS) i metoda maksimalne vjerodostojnosti (ML). Na bazi rezultata će se procijeniti konzistentnost navedenih metoda ocjene.

**Grafik 5.34.** Q-Q dijagram dnevne stopa prinosa akcija TECG u odnosu na normalnu raspodjelu




Ocijenjena matrica ortogonalnih promjenljivih $U$ na bazi ova tri metoda je:

$$\hat{U}_{MM} = \begin{bmatrix} 0.9998 & -0.02 \\ 0.02 & 0.9998 \end{bmatrix}, \quad \hat{U}_{NLS} = \begin{bmatrix} -0.65 & -0.76 \\ 0.76 & -0.65 \end{bmatrix}, \quad \hat{U}_{ML} = \begin{bmatrix} 0.723 & -0.69 \\ 0.69 & 0.723 \end{bmatrix}.$$

Ovdje treba napomenuti da se redovi matrice $U$ mogu međusobno mijenjati (kao komponente posmatranih promjenljivih) ili pomnožiti sa -1. Otuda i razlike u vrijednostima koje su dobijene na osnovu primjene različitih metoda za ocjenu.

Odgovarajuće ocjene matrice $Z$ date su sa

$$\hat{Z}_{MM} = \begin{bmatrix} 0.025 & 0.0022 \\ 0.00068 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z}_{NLS} = \begin{bmatrix} 0.992 & -0.127 \\ -0.027 & -0.999 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z}_{ML} = 076\begin{bmatrix} -0.076 & -0.997 \\ -0.999 & -0.299 \end{bmatrix}.$$

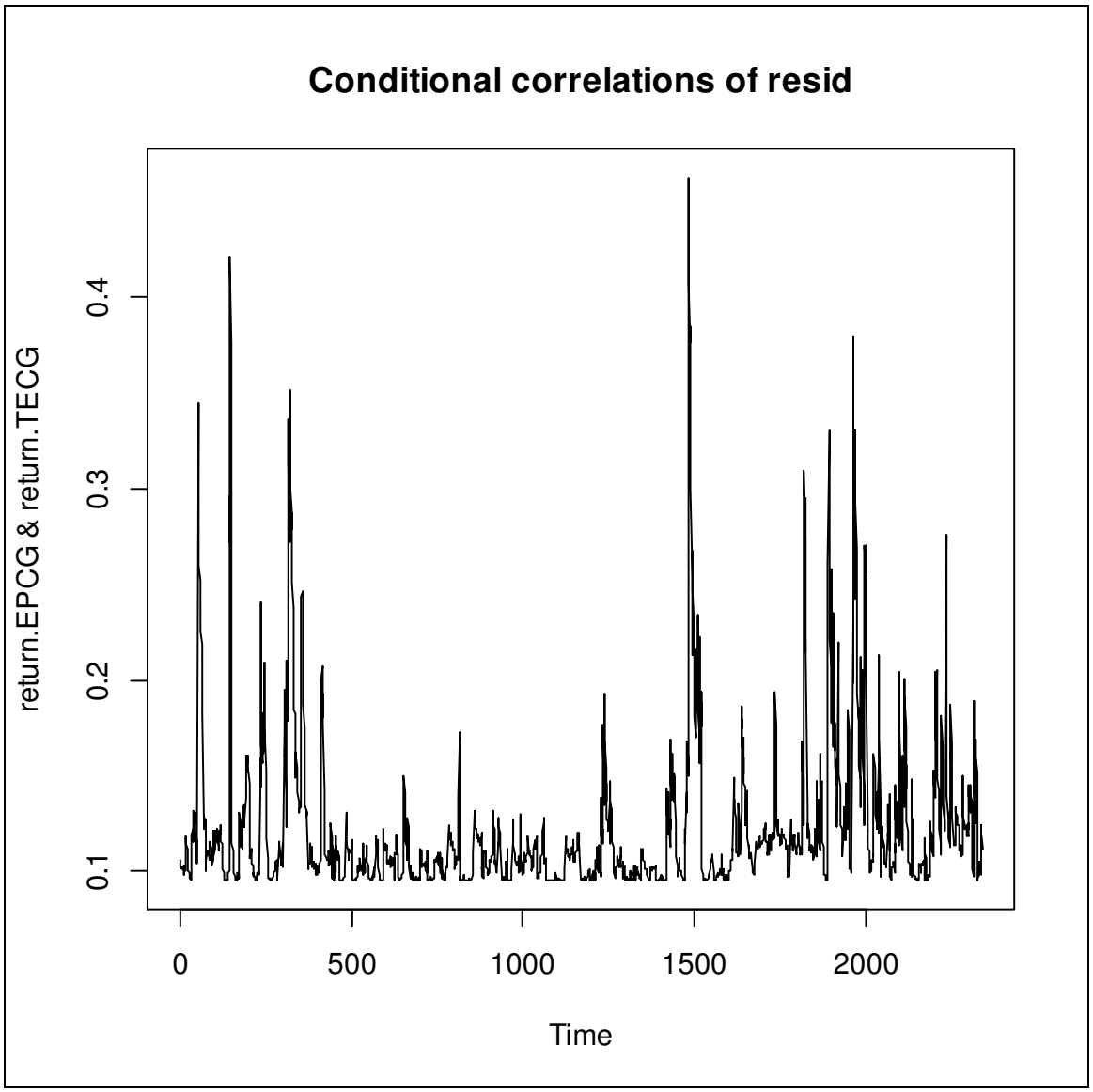
Parametri ocijenjenog GARCH(1,1) modela za dvije nezavisne komponente, za tri primijenjena metoda su dati u tabeli 5.17.

**Tabela 5.17.** Ocjene rezultata vrijednosti parametara GARCH(1,1) modela za 3 različita metoda ocjene (za odabrani portfolio)

| Komponente | Parametri GARCH modela | Metod ocjene prametara | | |
|---|---|---|---|---|
| | | *MM* | *NLS* | *ML* |
| Prva komponenta | $\omega$ | 0.0169 | 0.072 | 0.0696 |
| | $\alpha$ | 0.126 | 0.1677 | 0.176 |
| | $\beta$ | 0.878 | 0.7566 | 0.758 |
| Druga komponenta | $\omega$ | 0.0696 | 0.0167 | 0.0169 |
| | $\alpha$ | 0.1758 | 0.123 | 0.122 |
| | $\beta$ | 0.755 | 0.88 | 0.88 |

Zbir koeficijenata $\alpha + \beta$ je sličan za oba faktora, kod sva tri metoda ocjene, a primjećuje se i sličnost ocjena za data tri koeficijenta GARCH modela, samo što su, pri komparaciji data tri metoda, ocjene parametara GARCH modela prve komponente na osnovu uopštenog metoda momenata, jednake ocjenama parametara GARCH modela druge komponente na osnovu druga dva metoda (metoda maksimalne vjerodostojnosti i metoda nelinearnih najmanjih kvadrata). Time se zaključuje da je volatilnost posmatranog portfolija, kako kratkoročna, tako i dugoročna, dobro ocijenjena ovim modelima.

**Grafik 5.35.** Ocijenjene uslovne korelacije reziduala prinosa portfolija kroz vrijeme




Zaključuje se da uopšteni ortogonalni GARCH modeli dobro ocjenjuju dinamiku korelacije i volatilnost portfolija date dvije akcije sa crnogorskog tržišta.

Na grafiku 5.35. su prikazane promjene uslovne korelacije reziduala portfolija kroz vrijeme. U empirijskim analizama je najčešće zaključak da su korelacije ocijenjene

uopštenim ortogonalnim GARCH modelima umjerenije u volatilnosti.[97] U našem slučaju možemo reći da se kreću do nivoa od 0.2, a da postoji samo nekoliko ekstremnih vrijednosti koje prevazilaze dati nivo.

Parametar vrijednosti pri riziku (VaR) se računa na osnovu prognoziranih vrijednosti dnevnih prinosa u portfoliju, i njihove varijanse. Koeficijent korelacije u uzorku (očekivana vrijednost uzorkovanih podataka) je 0.1006907. Usvojena je pretpostavka da se radi o konstantnoj veličini – koeficijent se ne mijenja kroz vrijeme, radi jednostavnosti, odnosno usvaja se bivarijantni GARCH(1,1) model konstantne korelacije. Za dati model iz prethodnog dijela, koji koristi metod momenata za ocjenu parametara, prognoze za jedan period unaprijed (u našem slučaju $t$=2339) odgovarajućih veličina za računanje VaR-a su

$$\hat{r}_1 = 0, \quad \hat{\sigma}_1^2 = 0.000557, \quad \hat{r}_2 = 0, \quad \hat{\sigma}_2^2 = 0.002289.$$

Sada VaR svake akcije u portfoliju računa se kao 5% kvantil (formula (2.8)), pa je za akciju TECG:

$$VaR_1 = 0 + 1.65\sqrt{0.000557} = 0.0389414.$$

Na isti način, za akciju EPCG dobija se vrijednost $VaR_2 = 0.0789418$. VaR portfolija računa se na osnovu formule (2.24):

$$VaR = \sqrt{0.0389414^2 + 0.0789418^2 + 2 \cdot 0.1006907 \cdot 0.0389414 \cdot 0.0789418} = 0.091682.$$

[97] van der Weide, R. (2002) GO-GARCH: a Multivariate Generalized Orthogonal GARCH model. Journal of Applied Econometrics, 17(5), 549-564. str. 24.

**Tabela 5.18.** Ocjena VaR-a portfolija (5% i 1% kvantil) bivarijantnog GARCH(1,1) modela konstantne korelacije

| | Metod ocjene parametara | | |
|---|---|---|---|
| | ***MM*** | *NLS* | *ML* |
| VaR 5% | **0.091682** | 2.294123 | 2.33295 |
| VaR 1% | **0.12917** | 3.23957 | 3.294415 |

Na isti način, ocijenjeni su parametri VaR i na osnovu druga dva modela koji koriste metod nelinearnih najmanjih kvadrata (NLS) i metod maksimalne vjerodostojnosti (ML), pa su rezultati sumirani tabelom 5.18.

### 5.3.1. Komparativna analiza rezultata dvodimenzionog modela

Komparacijom rezultata koji su dati u tabeli 5.18. možemo zaključiti da metod uopštenih momenata potcjenjuje parametar tržišnog rizika. Naime, bivarijantni uopšteni ortogonalni GARCH(1,1) model konstantne korelacije daje slične rezultate kad za ocjenu parametara koristimo metod nelinearnih najmanjih kvadrata i metod maksimalne vjerodostojnosti, dok se korišćenjem metoda momenata dobijaju značajno manje vrijednosti parametra vrijednosti pri riziku, za oba korišćena nivoa greške ocjene, od 5% i 1%.

Ostaje otvoreno da li se dati slučaj može uopštiti da važi za finansijska tržišta ekonomija u razvoju, s obzirom da je metod uopštenih momenata u teorijskom dijelu rada naveden kao najbolji za ocjenu, jer ne zahtijeva ispunjenje velikog broja pretpostavki. Međutim, na primjeru našeg portfolija, metod uopštenih momenata potcjenjuje veličinu VaR-a portfolija. Takođe, Weide u svom radu[98] iznosi da je ocjena maksimalne vjerodostojnosti strogo konzistentna za uopštene multivarijacione GARCH modele, što je ovdje empirijski i dokazano. Weide predstavlja i uslove za konzistentnost koje je 1998. izveo Jeantheau.

[98] van der Weide, R. (2002) Op. cit. str. 14.

U slučaju posjedovanja 1000€ vrijednosti u navedenom portfoliju, potencijalni gubitak pozicije za naredni dan, uz rizik greške od 5%, bi maksimalno iznosio 22.9€ po metodu *NLS*, odnosno 23.33€ po metodu *ML*. Uz rizik greške od 1%, odgovarajuće vrijednosti parametra VaR istog portfolija bi iznosile 32.4€ po metodu *NLS* i 32.34€ po metodu *ML*. Upotrebom metoda momenata za ocjenu parametara bivarijantnog GARCH(1,1) modela sa konstantnom korelacijom, potencijalni gubitak pozicije (VaR portfolija) za naredni dan, uz rizik greške od 5%, bi maksimalno iznosio 0.91682€, a uz rizik greške od 1%, potencijalni gubitak pozicije za naredni dan bi maksimalno iznosio 1.2917€.

Treba naglasiti da je korišćen prostiji model konstantne korelacije, koji pretpostavlja da se korelacija kretanja prinosa akcija u portfoliju neće promijeniti u narednim periodima, već da će ostati na nivou prosječne vrijednosti koeficijenta korelacije u posmatranom periodu. Ovaj model je u literaturi posebno popularan za modeliranje matrica velikih uslovnih kovarijansi. Test za pretpostavku postojanja kontantne korelacije je uveo Tse u svom radu 2000. godine.[99] Data hipoteza se testira naspram alternativne koja dozvoljava vremenski promjenljive korelacije. Tse (2000) je pokazao da se za devizne kurseve nulta hipoteza konstantne korelacije ne može odbaciti, dok data pretpostavka za ostale finansijske instrumente izgleda nerealno. Naravno da je logičnije da će se ta korelacija mijenjati u budućim periodima, pa treba uzeti u obzir i dinamiku kretanja korelacije u uzorku i na osnovu datih vrijednosti prognozirati korelaciju u narednim periodima, pa datu prognozu koristiti i za efikasniju ocjenu parametra pri riziku navedenog portfolija. Međutim, korišćeni model konstantne korelacije dobro ispunjava pretpostavke za koje važi da daju strogo konzistentnu ocjenu, uz primjenu metoda maksimalne vjerodostojnosti, što je empirijski i dokazano.

Na kraju, očigledno je da je parametar vrijednosti pri riziku portfolija, za naredni period od jednog dana, manji od parametra koji se odnosi na jednu akciju – u prethodnom dijelu je računat parametar za akciju EPCG. To je logično s obzirom da se u portfoliju diverzifikuje rizik ulaganjem sredstava u više finansijskih instrumenata, pa je i potencijalni gubitak od takvog ulaganja manji. Treba naglasiti da postoji mogućnost da je

[99] van der Weide, R. (2002) Op. cit. str. 2.

i druga akcija uticala na smanjenje rizika, svojom volatilnošću. U prilog tome ide i činjenica da je varijansa akcije TECG (7.319) mnogo manja od varijanse akcije EPCG (23.96).

# VI ZAKLJUČAK

Aktuelna tema iz oblasti Finansijske ekonometrije je kvantifikovanje i upravljanje rizikom, pa je to i predmet istraživanja koje se razmatra u radu. Istraživanje je aktuelno i u teorijskom smislu, jer poslednjih godina u literaturi postoji sve veći broj modela koji se pokušavaju pokazati kao najbolji u kvantifikovanju i prognoziranju rizika. Sa praktične strane, prepoznata je potreba za što efikasnijim metodom računanja rizika, koji je neophodno uniformno koristiti kako bi i sama kontrola rizika u finansijskim institucijama bila olakšana.

Disertacijom su prikazani najnoviji pristupi koji se metodološki koriste u računanju, prije svega, tržišnog rizika, kao i statističke teorije koje su u njihovoj osnovi. Centralno mjesto u radu predstavlja teorija ekstremnih vrijednosti, koja se koristi u tretiranju rijetkih događaja, i njena primjena u računanju parametra vrijednosti pri riziku - VaR. Sa teorijske strane, značajan doprinos ima i primjena navedene teorije na višedimenzionu analizu. Navedeni metodološki okvir se po prvi put predstavlja u domaćoj literaturi, a empirijska primjena bilo kojih od prikazanih modela u radu na podatke finansijskog tržišta Crne Gore predstavlja pionirski poduhvat. Time su ispunjeni zadaci istraživanja zadatog disertacijom, čime se ujedno naglašava prepoznata potreba za detaljnijom analizom procjene svih vrsta rizika kod nas.

U uvodnom dijelu rada su navedeni razlozi izbora teme, kao i aktuelnost istraživanja, cilj i zadaci rada, hipotetički okvir i struktura rada. Osnovna teorijska hipoteza od koje se polazi u radu je da *finansijske vremenske serije karakteriše promjenljivost varijabiliteta tokom vremena*. Data osobina finansijskih vremenskih serija – volatilnost, se navodi kao osnovna osobina u literaturi iz ove oblasti, a u radu je dodatno i praktično dokazana, na primjerima posmatranih finansijskih instrumenata. Treba naglasiti da je osnovno ekonometrijsko modeliranje uslovnog varijabiliteta na osnovu modela uopštene autoregresione uslovne heteroskedastičnosti, ili skraćeno – GARCH modela.

U drugom poglavlju su detaljno razmotrene osobine finansijskih vremenskih serija, kao i osnovni pojmovi koji se tiču rizika. Najprije je definisan rizik, i navedene su vrste rizika, a dalje je fokus na tržišnom riziku, koji je predmet analize u empirijskom dijelu. Sledeća hipoteza u radu se odnosi na karakteristike finansijskih vremenskih serija: *Finansijske vremenske serije imaju repove koji su teži od repova normalne raspodjele*. Samim tim, podaci sa finansijskih tržišta se modeliraju raspodjelama koje imaju teže repove od normalne raspodjele, a to su uopštene raspodjele ekstremnih vrijednosti (Frešeova, Gumbelova i Vejbulova familija krivih) i uopštena Pareto raspodjela. Data hipoteza je dokazana teorijski, uz navedene teoreme, a u petom poglavlju i empirijski, gdje je na konkretnim podacima sa finansijskog tržišta Crne Gore pokazano da posmatrane vremenske serije ne prate normalnu raspodjelu, već se modeliraju Pareto raspodjelom ili Frešeovom raspodjelom, u zavisnosti od odabranog pristupa teorije ekstremnih vrijednosti (noviji pristup, metod vrhova iznad datog praga, naspram tradicionalnog pristupa, metoda blok maksimuma).

Mjere rizika koje su u radu razmotrene i empirijski ocijenjene su parametar vrijednosti pri riziku (VaR) i očekivani gubitak (ES). Mnogo češće se praktično koristi VaR, ali treba naglasiti da su, i pored njenih brojnih pogodnosti i prednosti, mnogi naučnici kritikovali adekvatnost ovog parametra kao mjere rizika. Kao osnovni nedostatak VaR-a navodi se to što nije koherentna mjera – ne zadovoljava sub-aditivnost. Takođe kod ocjene parametra vrijednosti pri riziku postoji problem kod agregacije kreditnog, tržišnog i operacionog rizika. Stoga, predlagane su alternativne mjere rizika, od kojih je najviše u upotrebi mjera ES (očekivani gubitak). Za razliku od VaR-a, ovo je koherentna mjera, ali mane su joj što je nije uvijek lako procijeniti.

Dalje, u drugom poglavlju su izložene različite metodologije kvantifikovanja VaR-a. To su modeli koji obuhvataju ekonometrijsku, kvantilnu (istorijsku) ocjenu i ocjenu na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti. Navedeni modeli su razvrstani na parametarske, neparametarske i semiparametarske modele, koji su detaljno razmotreni.

Teorija ekstremnih vrijednosti, kao centralna tema disertacije, je predmet razmatranja trećeg poglavlja. Ova teorija omogućava najbolju moguću ocjenu oblasti kojima pripada rep raspodjele, i predstavlja alat za biranje tipa raspodjele koji će najbolje tretirati ekstremne događaje. Kao što je već navedeno, postoje dva glavna tipa modela za ekstremne vrijednosti. Tradicionalni modeli su modeli blok maksimuma, koji se koriste za modeliranje maksimalnih opservacija iz velikih uzoraka, dok drugu grupu čine modeli vrhova iznad datog praga, koji su u sve većoj upotrebi i pokazuju se kao efikasniji u praksi. To su modeli koji koriste sve velike opservacije koje premašuju određeni nivo. Unutar ove druge klase modela razlikuju se dva pristupa u analizi. Danielsson, Hartman i de Vries su 1997. godine razvili semi-parametarske modele koji se baziraju na Hilovoj ocjeni parametara, a drugu grupu čine parametarski modeli koji se temelje na uopštenoj Pareto raspodjeli (Embrechts et al., 1997.). Oba pristupa su teorijski dokazana i empirijski korisna kada se pravilno koriste. U radu je korišćen drugi pristup zbog jednostavnosti. Uopštena Pareto raspodjela je raspodjela vjerovatnoće koja bi, za svrhe upravljanja rizikom, trebalo da se posmatra kao jednako važna (ako ne i važnija) u odnosu na normalnu raspodjelu, jer repovi normalne raspodjele nisu dovoljno teški za tretiranje ekstremnih gubitaka.

Takođe, doprinos rada je i taj što je izdvojen postupak kalkulacije parametra vrijednosti pri riziku za strogo stacionarne vremenske serije. U tom slučaju značajnu ulogu ima ekstremni indeks, čija vrijednost utiče na vrijednost parametra pri riziku.

Sledeća hipoteza koja je postavljena u istraživanju je da *je teoriju ekstremnih vrijednosti moguće proširiti izvan okvira jedne promljenljive*. Dokaz za datu hipotezu sadržan je u četvrtom poglavlju rada. Naime, ukoliko se formiraju ortogonalne serije uslovnih reziduala više promjenljivih, postiže se uslov da su one aproksimativno nezavisne i da imaju jednaku raspodjelu. Ortogonalizacija se može postići na nekoliko načina – pomoću ortogonalnog GARCH modela, zatim uopštenog ortogonalnog GARCH modela, putem Cholesky dekompozicije, kao i putem analize glavnih komponenata. U ovom poslednjem slučaju, dati reziduali se dobijaju iz glavnih komponenata serije zajedničkog prinosa koje su bez autokorelacije, heteroskedastičnosti i asimetrije. To se postiže uz pretpostavku da

proces zajedničkog prinosa prati stacionarni *n*-dimenzioni model iz ARMA-GARCH familije. Taj postupak je detaljno objašnjen u četvrtom poglavlju rada.

Isto tako, data hipoteza je testirana i empirijski u petom poglavlju. Portfolio od dvije izabrane akcije sa crnogorske berze – EPCG i TECG je tretiran uopštenim ortogonalnim GARCH modelom, u cilju računanja parametra vrijednosti pri riziku za naredni dan. Ovaj metod ortogonalizacije je odabran zbog jednostavnosti, i jer se u programskom paketu R može lako obraditi. Posebna pogodnost ovog programa je što pruža mogućnost ocjene parametara na više načina: pomoću metode momenata, pomoću moetode nelinearnih najmanjih kvadrata i pomoću maksimalne vjerodostojnosti. Parametri binarnog GARCH(1,1) modela sa konstantnom korelacijom su ocijenjeni na sva tri načina i rezultati su upoređeni međusobno, čime je pokazano da metod nelinearnih najmanjih kvadrata i metod maksimalne vjerodostojnosti daju konzistentne ocjene parametara, kao što je navođeno (za metod maksimalne vjerodostojnosti) i u ranijoj literaturi koja se bavi ovom problematikom. Sa druge strane, uopšteni metod momenata je najbolje koristiti u slučaju ocjene parametra vrijednosti pri riziku na osnovu glavnih komponenata uslovnih reziduala iz ARMA-GARCH modela, zbog toga što nema uslova o raspodjeli koje mora da zadovolji kako bi ocjene bile validne.

Rezultati empirijske analize koja je data u petom poglavlju rada su višestruko korisni. Oni sadrže i dokaz za poslednju istraživačku hipotezu, da su *ocjene parametra vrijednosti pri riziku na osnovu teorije ekstremnih vrijednosti bolje od ekonometrijskih ocjena*. U dijelu koji se odnosi na komparativnu analizu rezultata jednodimenzionog modela empirijski je dokazano da su ekonometrijske ocjene vrlo nestabilne u procjeni parametra vrijednosti pri riziku. Rezultati su pokazali da pri riziku greške od 5% date ocjene predstavljaju gornju granicu, a pri riziku greške od 1% predstavljaju donju granicu mogućeg intervala kretanja parametra pri riziku. Dakle, ne može se reći ni da potcjenjuju niti da precjenjuju dati parametar, već se ocjena značajno mijenja u zavisnosti od nivoa pouzdanosti ocjene. Kod primjene modela na tržišni indeks Monex20, rezultati su pokazali da se teorija ekstremnih vrijednosti pokazala kao bolja u ocjeni parametra VaR, odnosno, ekonometrijska ocjena potcjenjuje VaR u datom slučaju.

Na osnovu ovih rezultata, može se dati sugestija finansijskim institucijama da kvantifikuju rizik pomoću nekoliko metoda, i to koristeći: metod vrhova iznad datog praga (noviji pristup teorije ekstremnih vrijednosti), istorijsku ocjenu (kvantilnu) – za velike uzorke, i RiskMetrics metodu (koja sadrži ekonometrijsku ocjenu). Radi jednostavnosti, procjena rizika se može fokusirati na ove tri metode, jer su se pokazale kao najbolje, u smislu raspona u kome se može kretati prava vrijednost parametra pri riziku. Kao što je već navedeno, realna vrijednost ovog parametra se ne može opaziti, pa je nezahvalno izdvajati jedan metod ocjene kao najbolji.

Nerazvijenost finansijskog tržišta i instrumenata u Crnoj Gori, kao i zakonski okviri za kontrolu rizika, omogućavaju implementaciju samo osnovnih modela VaR-a u modeliranju rizika u Crnoj Gori, koji se svode na prostu kalkulaciju te vrijednosti. Uopšte, samo upravljanje rizikom kod nas nije dovoljno razvijeno, ali treba naglasiti da će u skorijem periodu biti neophodno revidiranje mjerenja rizika i usklađivanje sa evropskim standardima. Zato je u radu dat osvrt na standarde Bazela II i III, kao i preporuke u skladu sa njima. Naravno, u standardima postoje pojedini propusti na koje su ukazali akademci i kritikovali ih. Osnovni zaključak koji proističe iz istraživanja je da, i pored činjenice da se radi o nedovoljno razvijenom tržištu kojem nedostaju savremeni finansijski instrumenti, adekvatna regulativa i sl., finansijske institucije u Crnoj Gori bi trebalo da upravljaju rizikom i vrše njegovu kontrolu kroz implementaciju standarda Bazela II i III i primjenu adekvatnih metoda kvantifikacije rizika koji daju najbolje rezultate.

U domenu ove problematike koja se razmatra u radu, dalji naučni doprinos može da se kreće u pravcu dalje detaljnije analize višedimenzionih modela koji kvantifikuju rizik. Jedan od zadataka doktorske disertacije je da se teorija ekstremnih vrijednosti proširi i na višedimenzionu analizu, što je i ispunjeno. Za neki dalji naučni rad bilo bi korisno napraviti empirijsku komparaciju svih navedenih modela iz teorijskog dijela (analiza glavnih komponenata uslovnih reziduala iz ARMA-GARCH višedimenzionog modela, ortogonalni GARCH, uopšteni ortogonalni GARCH) i uporediti ocjene VaR-a dobijene

ovim različitim modelima. Do sada u literaturi ovako nešto nije obrađeno, već se izdvaja jedan model čiji su rezultati empirijski pokazani, izuzev poređenja ortogonalnog GARCH modela i uopštenog ortogonalnog GARCH modela, koji su međusobno slični, i u stvari je prvi model specijalan slučaj ovog drugog. To su obrađivali autori kao što su Weide (2002) i Alexander (2009).

Što se tiče prepoznate potrebe za efikasnijim kvantifikovanjem rizika u praksi, neophodna je dugoročna analiza navedenih parametara, naročito u kontekstu krize na finanasijskom tržištu koja zahtijeva neposrednu akciju finansijskih institucija. Primijenjeno na crnogorsko tržište, treba naglasiti i preporučiti zvaničnu «najbolju praksu», kao i tehnike koje vode ispravljanju nedostataka regulacija.

**LITERATURA:**


1. Alexander, C. (2001a) Mastering Risk, Volume 2. London: Financial Times Prentice Hall.
2. Alexander, C. (2001b) A Primer on the Orthogonal GARCH Model. Available at http://www.ismacentre.rdg.ac.uk.
3. Alexander, C. (2009) Market Risk Analysis: Value at Risk Models v. 4. John Wiley & Sons. West Sussex.
4. Artzner, P., Delbean, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1997) Thinking Coherently. RISK 10(11): 68-71.
5. Artzner, P., Delbean, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999) Coherent measures of risk. Mathematical Finance, 9(3), 203-228.
6. Barnett, V. (1976) The ordering of multivariate data. Journal of the Royal Statistical Association 139, 318-345.
7. Barone-Adesi, G., Bourgoin F., Giannopoulos, K. (1998) Don't look back. Risk 11 (8), 100-104.
8. Basel Committee on Banking Supervision (1988) Amendment to the Capital Accord. Basel, Switzerland. Available at http://www.bis.org/publ/bcbs12b.pdf.
9. Basel Committee on Banking Supervision (2001) The New Basel Capital Accord, Consultative Document. Basel, Switzerland. Available at http://www.bis.org/publ/bcbsca03.pdf.
10. Basel Committee on Banking Supervision (2004) International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework. Basel, Switzerland. http://www.bis.org/publ/bcbs107.pdf.
11. Beder, T. S. (1995) VaR: Seductive but dangerous. Financial Analysts Journal 51, 12-24.
12. Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., Teugels, J. (2004) Statistics of Extremes: Theory and Applications. Wiley, Chichester.
13. Berger, A. N., Herring, R. J., Szegö, G. P. (1995) The role of capital in financial institutions. Journal of Banking and Finance 19, 393-430.

14. Berkowitz J., O'Brien J. (2002) How Accurate are Value-At-Risk Models at Commercial Banks? Journal of Finance, 57(3), 1093-1111.
15. Berman, S. M. (1964) Limiting theorems for the maximum term in stationary sequences. Annals of Mathematical Statistics 35, 502-516.
16. Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Journal of Econometrics 31, 307-327.
17. Bollerslev, T. Woolridge, J. M. (1992) Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances. Econometric Reviews 11, 143-172.
18. Boudoukh, J., Richardson, M., Whitelaw, R. (1998) The Best of Both Worlds. Risk 11, 64-67.
19. Boulier, J. F., Dalaud, R., Longin, F. M. (1997) Risk management and extreme values. Working Paper, Crédit Commercial de France, Paris, France.
20. Božović, M. (2013) Portfolio Tail Risk: An Efficient Multivariate Extreme Value Theory Approach. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2313148 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2313148.
21. Brooks, C. (2008) Introductory Econometrics for Finance (Second Edition). Cambridge University Press.
22. Chernozhukov, V. Umantsev, L. (2000) Conditional Value-at-Risk: Aspects of Modeling and Estimation, Stanford University, preprint.
23. Cosimano, T. F., Hakura, D. S. (2011) Bank Behavior in Response to Basel III: A Cross-Country Analysis. International Monetary Fond. Working Paper. Available at: http://www.imf.org/external/pubs/ft/wp/2011/wp11119.pdf.
24. Danielsson, J., De Vries, C. (1997) Value at Risk and Extreme Returns. FMG Discussion Paper No. 273, Financial Markets Group, London School of Economics.
25. Danielsson, J., Embrechts, P., Goodhart, C., Keating, C., Muennich, F., Renault, O., Shin, H. S. (2001) An academic response to Basell II. Special paper no 130, LSE Financial Markets Group, an ESRC Research Centre.
26. De Haan, L., Ferreira, A. (2006) Extreme Value Theory: An Introduction. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York.

27. De Haan, L., Resnick, I. S., Rootzén, H., De Vries, C. G. (1989) Extremal behavior of solutions to a stochastic di.erence equation with applications to ARCH process. Stochastic Processes and their Applications 32, 213-224.
28. Dewatripont, M., Tirole, J. (1994) The Prudential Regulation of Banks. MIT Press, Cambridge, MA.
29. Dimson, E., Marsh, P. (1997) Stress tests of capital requirements. Journal of Banking and Finance 21, 1515-1546.
30. Dowd, K. (2005) Measuring market risk (2nd edition). Wiley Series in Frontiers in Finance, John Wiley & sons Ltd. Chichester, West Sussex, United Kingdom.
31. Düe, D., Pan, J. (1997) An overview of value at risk. Journal of Derivatives, Spring, 7-48.
32. Embrechts, P., (2000) Extreme Value Theory: Potential and Limitations as an Integrated Risk Management Tool. ETH preprint (http://www.math.ethz.ch/~embrechts).
33. Embrechts, P., de Haan, L., Huang, X. (1999) Modelling Multivariate Extremes. ETH preprint. (http://www.math.ethz.ch/~embrechts).
34. Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin.
35. Embrechts, P., Resnick, S. I., Samorodnitsky, G. (1998) Living on the edge. Risk 11, 96-100.
36. Engle, R. F. (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom inflation. Econometrica 50, 987-1007.
37. Engle, R. F. Gonzalez-Rivera, G. (1991) Semiparametric ARCH Models. Journal of Business and Economic Statistics 9, 345-359.
38. Engle, R. F. Manganelli, S. (1999) CaViaR: Conditional Value at Risk by Quantile Regression. NBER, Working paper 7341.
39. Engle, R. F., Manganelli, S. (2004) CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. Journal of Business and Economic Statistics . Vol. 22, No. 4. 367-381.
40. European Commission (1996) Credit Institutions. Community Measures Adopted or Proposed. English Updated Version, May 1996, DG XV-1081-96, Brussels, Belgium.

41. EVIEWS 5 User's Guide (2004). Quantitative Micro Software, CA.
42. Fama, E. (1965) The Behaviour of Stock Market Prices. Journal of Business, 38: 34-105.
43. Feller, W. (1971) An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 2. Wiley, New York.
44. Fisher, R., Tippet, L. H. C. (1928) Limiting forms of the frequency distribution of largest or smallest member of a sample. Proceedings of the Cambridge philosophical society, 24: 180-190.
45. Galambos, J. (1978) The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. Wiley, New York.
46. Gençay, R., Selçuk, F., Ulugülyağcı, A. (2001) EVIM: A software package for extreme value analysis in Matlab. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics 5, 213–239.
47. Gençay, R., Selçuk, F., Ulugülyağcı, A. (2003) High volatility, thick tails and extreme value theory in Value-at- Risk estimations. Insurance: Mathematics and Economics, 33, 337-356.
48. Gençay, R., Selçuk, F. (2004) Extreme value theory and value-at-risk: Relative performance in emerging markets. International Journal of Forecasting 20, 287–303.
49. Gilli, M., Kellezi, E. (2006) An application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. Computational Economics 27(2-3), 207-228.
50. Glosten, L. R., Jagannathan, R., Runkle, D. E. (1993) On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. The Journal of Finance. Vol. 48, No. 5. str. 1779–1801.
51. Gnedenko, B. V. (1943) Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. Annals of Mathematics 44, 423-453.
52. Gumbel, E. J. (1958) Statistics of Extremes. Columbia University Press, New York.
53. Hamao, Y., Masulis, R. W., Ng, V. (1990) Correlation in price changes and volatility across International Stock Markets. Review of Financial Studies 3, 281-308.
54. Hansen, L. P. (1982) Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. Econometrica, 50, 1029-1054.

55. Hill, B. M. (1975) A simple general approach to inference about the tail of a distribution. Annals of Statistics 3, 1163-1173.
56. Hsing, T., Hüsler, J., Leadbetter, M. R. (1988) On the exceedance point process for a stationary sequence. Probability Theory and Related Fields 78: 97-112.
57. Hull, J., White, A. (1998) Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for VaR. The Journal of Risk 1, 5-19.
58. Jackson, P., Maude, D. J., Perraudin, W. (1997) Bank capital and value at risk. Journal of Derivatives, Spring, 73-89.
59. Jansen, D. W., De Vries, C. G. (1991) On the frequency of large stock returns: Putting booms and busts into perspective. Review of Economic and Statistics 73, 18-24.
60. Jeantheau, T. (1998) Strong consistency of estimators for multivariate arch models. Econometric Theory 14: 70-86.
61. Jednak, J. (2007) Finansijska tržišta – 3. izmenjeno i dopunjeno izdanje, Beograd: Beogradska poslovna škola.
62. Jorion, P. (1996) Risk$^2$: Measuring the risk in value at risk. Financial Analysts Journal 52, 47-56.
63. Jorion, P. (1997) Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk. McGraw-Hill, Chicago.
64. JP Morgan (1995) RiskMetrics$^{TM}$ - Technical Document, 3rd ed.
65. Kašćelan, V., Novović, M. (2009) Osiguranje i Aktuarska Matematika. Univerzitet Crne Gore, Podgorica.
66. Kendall (1994) In: Alan Stuart, Keith J. Ord (Eds.), Kendall's Advanced Theory of Statistics, 6$^{th}$ ed., vol. 1. Edward Arnold, New York.
67. Kindleberger, C. P. (1978) Manias, Panics and Crashes. MacMillan, New York.
68. Koenker, R. Bassett, G. (1978) Regression Quantiles. Econometrica 46, 33-50.
69. Kočović, J., Šulejić, P. (2002) Osiguranje. Ekonomski fakultet Beograd, Beograd.
70. Kupiec, P. H. (1995) Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. Journal of Derivatives 3, 73-84.
71. Leadbetter, M. R. (1974) On extreme values in stationary sequences. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitsthorieund Verwandte Gebiete 28: 289-303.

72. Leadbetter, M. R., Lindgren, G., Rootzen, H. (1983) Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer-Verlag, New York.

73. Leadbetter, M. R., Nandagopalan, S. (1989) On exceedances point processes for stationary sequences under mild oscillatory restrictions. In: Proceedings of Oberwolfach Meeting. 1987 (Notes in Statistics 51, Springer, New York).

74. Lo, A. W., MacKinlay, A. C. (1990) An econometric analysis of nonsynchronous trading. Journal of Econometrics 45, 181-211.

75. Longerstaey, J., More, L. (1995) Introduction to RiskMetrics. Morgan Guaranty Trust Company of New York.

76. Longin, F. M. (1995) Optimal margins in futures markets: A parametric extreme-based method. In: Proceedings of the 7th Chicago Board of Trade Conference on Futures and Options. September 1994, Bonn, Germany.

77. Longin, F. M. (1996) The asymptotic distribution of extreme stock market returns. Journal of Business 63, 383-408.

78. Longin, F. M. (1997a) The threshold effect in expected volatility: A model based on asymmetric information. The Review of Financial Studies 10, 837-869.

79. Longin, F. M. (1997b) Beyond the VaR. Working Paper 97-011, ESSEC, Cergy-Pontoise, France.

80. Longin, F. M. (1999) From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach. Center for Economic Policy Research, Discussion Paper No. 2161.

81. Longin, F. M. (2000) From value at risk to stress testing: The extreme value approach. Journal of Banking & Finance 24, 1097-1130.

82. Longin, F. M., Solnik, B. (1995) Is the correlation in International Equity Returns Constant: 1960-1990? Journal of International Money and Finance 14, 3-26.

83. Longin, F. M., Solnik, B. (1997) Correlation structure of International Equity Markets during extremely volatile periods. Working Paper 97-039-, ESSEC, Cergy-Pontoise, France.

84. Loretan, M., Phillips, P. C. B. (1994) Testing the covariance stationarity of heavy-tailed time series. Journal of Empirical Finance 1, 211-248.

85. Mandelbrot, B. (1963) The Variation of Certain Speculative Prices. Journal of Business 36 str. 394-419.

86. Manganelli, S., Engle, R. F. (2001) Value at Risk Models in Finance. ECB Working Paper No. 75. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=356220.
87. McNeil, A. J. (1998) Calculating quantile risk measures for financial return series using extreme value theory. Working Paper, ETH, Zürich, Switzerland.
88. McNeil, A. J. (1999) Extreme value theory for risk managers. Working Paper, ETH, Zürich, Switzerland.
89. McNeil, A. J., Frey, R. (2000) Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach. Journal of Empirical Finance, 7, 271– 300.
90. McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2005) Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press, Princeton.
91. Merton, R. C., Perold, A. F. (1993) Theory of risk capital in financial firms. Journal of Applied Corporate Finance 6, 16-32.
92. Mills, T. C., Markellos R. N. (2008) The Econometric Modelling of Financial Time Series (Third Edition).Cambridge University Press.
93. Mladenović, Z., Mladenović P. (2007) Ocena parametra vrednosti pri riziku: Ekonometrijska analiza i pristup teorije ekstremnih vrednosti. Ekonomski anali br. 171. 32-73.
94. Mladenović, Z., Petrović P. (2003) Uvod u ekonometriju. Ekonomski fakultet, Beograd.
95. Newey, W. K., McFadden, D. (1994) Large Sample Estimation and Hypothesis Testing. Chapter 36, p. 2111-2245 of: Engle, R. F., McFadden, R. (eds), Handbook of Econometrics, vol. 4.
96. Nyström, K., Skoglund, J. (2002a) A Framework for Scenario-Based Risk Management. Working Paper, Swedbank.
97. Nyström, K., & Skoglund, J. (2002b) Univariate Extreme Value Theory, GARCH and Measures of Risk. Working Paper, Swedbank.
98. O'Brien, G. L. (1987) Extreme values for stationary and markov sequences. Annals of Probability 15: 281-291.
99. Pearson, N. D. (2002) Risk budgeting: Portfolio problem solving with Value-at-Risk. John Wiley & Sons, New York.

100. Pickands, J. (1975) Statistical inference using extreme order statistics. Annals of Statistics 3: 119-131.

101. Pritsker, M. (2001) The Hidden Dangers of Historical Simulation. Working Paper, Board of Governors of the Federal Reserve System and University of California and Berkeley, The Federal Reserve Board, Washington DC, United States.

102. Rachev, S. T., Mittnik, S., Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., Jašić, T. (2007) Financial Econometrics: From Basics to Advanced Modeling Techniques (Frank J. Fabozzi Series). John Wiley & Sons, Inc.

103. Reiss, R. D., Thomas, M. (2007) Statistical Analysis of Extreme Values. Birkhäuser, Basel.

104. RiskMetrics (1996). Technical Document. Morgan Guaranty Trust Company of New York.

105. Rossignolo, A. F., Duygun Fethi, M., Shaban, M. (2012) Value-at-Risk models and Basel capital charges: Evidence from Emerging and Frontier stock markets. Journal of Financial Stability 8 (4), 303-319.

106. Sargan, D. (1958) The Estimation of Economic Relationships Using Instrumental Variables. Econometrica, 26, 393-415.

107. Sherman, L. K. (1957) Percentiles of the Xn statistic. Annals of Mathematical Statistics 28, 259-268.

108. Skoglund, J. (2001) A Simple Efficient Estimator of GARCH Models. Working Paper Series in Economics and Finance. Stockholm School of Economics.

109. Slovik, P., Cournède, B. (2011) Macroeconomic Impact of Basel III, OECD Economics Department Working Papers, No. 844. OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/5kghwnhkkjs-en.

110. Smith, R. L. (1985) Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. Biometrika 72: 67-92.

111. Smith, R. L. (1989) Extreme value analysis of environmental time series: An aplication to trend detection in ground-level ozone (with discussion). Statistical Science 4: 367-393.

112. Smith, R. L. (2000) Measuring Risk with Extreme Value Theory. In: Risk Management: Theory and Practice. Cambridge University Press.

113. Stewart, K. G. (2004) Introduction to Applied Econometrics. South Western Educational Publishing.
114. Stoll, H. R., Whaley, R. E. (1990) The dynamics of stock index and stock index futures returns. Journal of Financial and Quantitative Analysis 25, 441-468.
115. Tawn, J. A. (1988) Bivariate extreme value theory. Models and estimation. Biometrika 75, 397-415.
116. Taylor, S. (1986) Modelling Financial Time Series. Chichester, U.K.: Wiley.
117. Tiago de Oliveira, J. (1973) Statistical Extremes - A Survey, Center of Applied Mathematics, Faculty of Sciences, Lisbon, Portugal.
118. Tiago de Oliveira, J. (1974) Regression in nondi.erentiable bivariate extreme models. Journal of the American Statistical Association 69, 816-818.
119. Tsay, R. S. (2010) Analysis of Financial Time Series, Third Edition. John Wiley & Sons, Inc.
120. Tse, Y. (2000) A test for constant correlations in a multivariate garch model. Journal of Econometrics, 98: 107-127.
121. van der Weide, R. (2002) GO-GARCH: a Multivariate Generalized Orthogonal GARCH model. Journal of Applied Econometrics, 17(5), 549-564.
122. White, H. (1994) Estimation, Inference and Specification Analysis. Cambridge University Press.
123. Wilson, T. C. (1996) Calculating risk capital. In: Alexander, C. (Ed.), The Handbook of Risk Management and Analysis. Wiley, Chichester.

Web stranice:

1. Amendment to the capital accord to incorporate market risks, http://www.bis.org/publ/bcbs119.htm
2. Basel Committee on Banking Supervision, http://www.bis.org/bcbs/index.htm
3. CBCG: Centralna banka Crne Gore, http://www.cb-cg.org
4. Gloria – Mundi - - Home, http://www.gloria-mundi.com
5. International Regulatory Framework for Banks, (Basel III), http://www.bis.org/bcbs/basel3.htm.

6. Montenegroberza AD Podgorica, http://www.montenegroberza.com
7. MSCI, http://www.msci.com
8. Orange County Value-at-Risk, http://merage.uci.edu/~jorio/oc/case.html
9. RAL | RAL Home | Forecast Evaluation and Applied Statistics, http://www.ral.ucar.edu/~ericg/softextreme.php

**STATISTIČKI DODATAK**

Programske komande za empirijsku analizu u programu R sa rezultatima

```
> library(base)
> da=read.table("C:\\Documents and Settings\\Korisnik\\Desktop\\Prakticni dio\\Podaci
EPCG.txt",header=T)
> dim(da)
[1] 2338    2
> da[1,]
     date return
1 19/06/13      0
> epcg=da[,2]*100
> basicStats(epcg)
                 epcg
nobs        2338.000000
NAs            0.000000
Minimum      -41.941916
Maximum       39.283097
1. Quartile   -0.507194
3. Quartile    0.497809
Mean           0.168354
Median         0.000000
Sum          393.612056
SE Mean        0.101220
LCL Mean      -0.030137
UCL Mean       0.366845
Variance      23.954149
Stdev          4.894298
Skewness       0.603812
Kurtosis      19.877759
> s1=skewness(epcg)
> t1=s1/sqrt(6/2338)
> t1
[1] 11.91923
attr(,"method")
[1] "moment"
> pv=2*(1-pnorm(t1))
> pv
[1] 0
attr(,"method")
[1] "moment"
> t.test(epcg)
```

```
        One Sample t-test

data:  epcg
t = 1.6632, df = 2337, p-value = 0.0964
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.0301370  0.3668453
sample estimates:
mean of x
0.1683542

> normalTest(epcg,method="jb")

Title:
 Jarque - Bera Normalality Test

Test Results:
  STATISTIC:
    X-squared: 38709.9214
  P VALUE:
    Asymptotic p Value: < 2.2e-16

> par(mfcol=c(2,1))
> plot(epcg)
> acf(epcg)
> Box.test(epcg,lag=8,type="Ljung")

        Box-Ljung test

data:  epcg
X-squared = 101.7618, df = 8, p-value < 2.2e-16

> epcg1=ts(epcg,frequency=272,start=c(2004,1))
> plot(epcg)
> plot(epcg1)
> m1=ar(epcg,method="mle")
> m1

Call:
ar(x = epcg, method = "mle")

Coefficients:
      1       2       3       4       5       6       7       8
-0.1181  -0.0194   0.0483   0.0713  -0.0113   0.0515  -0.0364   0.0892
      9      10      11      12
 0.0251  -0.0091  -0.0307   0.0788
```

```
Order selected 12  sigma^2 estimated as  0.00228
> m1$order
[1] 12
> m1=ar(diff(epcg),method="mle")
> m1$order
[1] 12
> adfTest(epcg,lags=12,type=c)
Error in type[1] : object of type 'builtin' is not subsettable
> adfTest(epcg,lags=12)

Title:
 Augmented Dickey-Fuller Test

Test Results:
  PARAMETER:
    Lag Order: 12
  STATISTIC:
    Dickey-Fuller: -11.4927
  P VALUE:
    0.01

Description:
 Mon Jul 29 21:50:41 2013 by user: Korisnik

Warning message:
In adfTest(epcg, lags = 12) : p-value smaller than printed p-value

> library(base)
> da=read.table("C:\\Documents and Settings\\Korisnik\\Desktop\\Prakticni dio\\Podaci
TECG.txt",header=T)
> dim(da)
[1] 2338    2
> tecg=da[,2]*100
> basicStats(tecg)
                tecg
nobs       2338.000000
NAs           0.000000
Minimum     -69.334713
Maximum       9.531432
1. Quartile  -0.794400
3. Quartile   0.835136
Mean          0.058605
Median        0.000000
Sum         137.018601
SE Mean       0.055950
```

```
LCL Mean      -0.051112
UCL Mean       0.168322
Variance       7.318908
Stdev          2.705348
Skewness      -7.043124
Kurtosis     186.047379
> s1=skewness(tecg)
> t1=s1/sqrt(6/2338)
> t1
[1] -139.0311
attr(,"method")
[1] "moment"
> pv=2*(1-pnorm(t1))
> pv
[1] 2
attr(,"method")
[1] "moment"
> t.test(tecg)

        One Sample t-test

data:  tecg
t = 1.0475, df = 2337, p-value = 0.295
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.05111196  0.16832206
sample estimates:
 mean of x
0.05860505

> normalTest(tecg,method="jb")

Title:
 Jarque - Bera Normalality Test

Test Results:
  STATISTIC:
    X-squared: 3397166.922
  P VALUE:
    Asymptotic p Value: < 2.2e-16

> plot(tecg)
> acf(tecg)
> Box.test(tecg,lag=8,type="Ljung")

        Box-Ljung test
```

```
data:  tecg
X-squared = 8.9476, df = 8, p-value = 0.3467

> at=tecg-mean(tecg)
> Box.test(at,lag=8,type="Ljung")

        Box-Ljung test

data:  at
X-squared = 8.9476, df = 8, p-value = 0.3467

> Box.test(at^2,lag=8,type="Ljung")

        Box-Ljung test

data:  at^2
X-squared = 1.2924, df = 8, p-value = 0.9956

> da=read.table("C:\\Documents and Settings\\Korisnik\\Desktop\\Prakticni dio\\Podaci
EPCG.txt",header=T)
> epcg=da[,2]*100
> nepcg=-epcg
> q99=quantile(nepcg,0.99)
> q99
     99%
14.64244
> q95=quantile(nepcg,0.95)
> q95
     95%
5.395052
> idx=c(1:length(nepcg))[nepcg>q99]
> es=mean(nepcg[idx])
> es
[1] 23.19685
> idx=c(1:length(nepcg))[nepcg>q95]
> es=mean(nepcg[idx])
> es
[1] 11.69137

> m6=garchFit(epcg~arma(1,3)+garch(1,1),data=epcg,trace=F)
> summary(m6)

Title:
 GARCH Modelling
```

```
Call:
 garchFit(formula = epcg ~ arma(1, 3) + garch(1, 1), data = epcg,
   trace = F)

Mean and Variance Equation:
 data ~ arma(1, 3) + garch(1, 1)
<environment: 0x039360f0>
 [data = epcg]

Conditional Distribution:
 norm

Coefficient(s):
        mu         ar1         ma1         ma2         ma3       omega
-1.6929e-05   9.9696e-01  -8.7183e-01  -1.7137e-01   5.1543e-02   1.8531e-04
    alpha1       beta1
 1.7587e-01   7.4366e-01

Std. Errors:
 based on Hessian

Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -1.693e-05   9.878e-06   -1.714   0.0865 .
ar1     9.970e-01   2.496e-03  399.444  < 2e-16 ***
ma1    -8.718e-01   3.091e-02  -28.210  < 2e-16 ***
ma2    -1.714e-01   3.982e-02   -4.303 1.68e-05 ***
ma3     5.154e-02   2.880e-02    1.790   0.0735 .
omega   1.853e-04   1.928e-05    9.612  < 2e-16 ***
alpha1  1.759e-01   1.888e-02    9.314  < 2e-16 ***
beta1   7.437e-01   2.082e-02   35.713  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Log Likelihood:
 4314.192    normalized:  1.845249

Description:
 Wed Jul 31 22:01:51 2013 by user: Korisnik


Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  75584.7   0
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.736086  0
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  37.74982  4.195154e-05
```

```
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  46.78232  3.989473e-05
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  51.65344  0.0001278833
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  4.214609  0.9371467
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  6.154962  0.9770255
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  6.917206  0.9969479
 LM Arch Test       R    TR^2   5.462165  0.9407375

Information Criterion Statistics:
     AIC       BIC       SIC      HQIC
-3.683655 -3.663956 -3.683678 -3.676479
> stresi=residuals(m6,standardize=T)
> plot(stresi)
> acf(stresi)


> predict(m6,5)
  meanForecast  meanError standardDeviation
1 -0.0009245689 0.04619341       0.04619341
2 -0.0025521846 0.04669943       0.04634036
3 -0.0023455062 0.04688488       0.04647508
4 -0.0023552953 0.04701031       0.04659861
5 -0.0023650545 0.04712540       0.04671191

> library(evir)
> da=read.table("C:\\Documents and Settings\\Korisnik\\Desktop\\Prakticni dio\\Podaci
EPCG.txt",header=T)
> epcg=da[,2]*100
> nepcg=-epcg
> par(mfcol=c(2,1))
> hill(epcg,option=c("xi"),end=500)
> hill(nepcg,option=c("xi"),end=500)
> hill(epcg,option=c("xi"),end=200)
> hill(nepcg,option=c("xi"),end=200)
> sepcg=sort(epcg)
> T=length(epcg)
> q=190
> ist=T-q
> y=log(sepcg[ist:T])
> hill=sum(y[2:length(y)])/q
> hill=hill-y[1]
> sd=sqrt(hill^2/q)
> cat("Hill estimate & std-err:",c(hill,sd),"\n")
Hill estimate & std-err: 0.7232026 0.05246663
> m1=gev(epcg,block=21)
> m1
$n.all
```

```
[1] 2338

$n
[1] 112

$data
  [1]  0.2439024  0.0000000  0.0000000  9.5121951  4.8780488  0.0000000
...
[109]  0.3358522  3.0701754 19.6184074  7.5000000

$block
[1] 21

$par.ests
       xi     sigma        mu
0.3764479 4.2768771 4.6899317

$par.ses
        xi      sigma         mu
0.09094183 0.41057679 0.46509927

$varcov
             [,1]         [,2]        [,3]
[1,]  0.0082704173 0.0008649793 -0.01252248
[2,]  0.0008649793 0.1685732996  0.13050495
[3,] -0.0125224838 0.1305049461  0.21631733

$converged
[1] 0

$nllh.final
[1] 363.6732

attr(,"class")
[1] "gev"
> names(m1)
[1] "n.all"      "n"          "data"       "block"      "par.ests"
[6] "par.ses"    "varcov"     "converged"  "nllh.final"
> plot(m1)

Make a plot selection (or 0 to exit):

1: plot: Scatterplot of Residuals
2: plot: QQplot of Residuals

Selection: 1
```

```
Make a plot selection (or 0 to exit):

1: plot: Scatterplot of Residuals
2: plot: QQplot of Residuals

Selection: 2

Make a plot selection (or 0 to exit):

1: plot: Scatterplot of Residuals
2: plot: QQplot of Residuals

> q=200
> ist=T-q
> y=log(sepcg[ist:T])
> hill=sum(y[2:length(y)])/q
> hill=hill-y[1]
> sd=sqrt(hill^2/q)
> cat("Hill estimate & std-err:",c(hill,sd),"\n")
Hill estimate & std-err: 0.7349418 0.05196824

> q=210
> ist=T-q
> y=log(sepcg[ist:T])
> hill=sum(y[2:length(y)])/q
> hill=hill-y[1]
> sd=sqrt(hill^2/q)
> cat("Hill estimate & std-err:",c(hill,sd),"\n")
Hill estimate & std-err: 0.7377017 0.05090625

> snepcg=sort(nepcg)
> T=length(nepcg)
> q=190
> ist=T-q
> y=log(snepcg[ist:T])
> hill=sum(y[2:length(y)])/q
> hill=hill-y[1]
> sd=sqrt(hill^2/q)
> cat("Hill estimate & std-err:",c(hill,sd),"\n")
Hill estimate & std-err: 0.736693 0.05344533
> q=200
> ist=T-q
> y=log(snepcg[ist:T])
> hill=sum(y[2:length(y)])/q
> hill=hill-y[1]
```

```
> sd=sqrt(hill^2/q)
> cat("Hill estimate & std-err:",c(hill,sd),"\n")
Hill estimate & std-err: 0.7596569 0.05371585
> q=210
> ist=T-q
> y=log(snepcg[ist:T])
> hill=sum(y[2:length(y)])/q
> hill=hill-y[1]
> sd=sqrt(hill^2/q)
> cat("Hill estimate & std-err:",c(hill,sd),"\n")
Hill estimate & std-err: 0.7689849 0.053065

> m1=gev(nepcg,block=21)
> r1=rlevel.gev(m1,k.blocks=12)
> r1
[1] 14.52729 17.76847 23.69725

> nepcg=nepcg/100
> par(mfcol=c(2,1))
> qplot(nepcg,threshold=0.025,main="Negative daily EPCG log returns")
> meplot(nepcg)
> title(main="Mean excess plot")
> m3=pot(nepcg,0.025)
> m3
$n
[1] 2338

$period
[1]    1 2338

$data
  [1] 0.14509552 0.04879016 0.13353139 0.05416478 0.02550263 0.05690813
...
[247] 0.02702867 0.04742268 0.30904689 0.04762805 0.09086573
attr(,"times")
  [1]    6   20   21   36   37   41   59   94  102  109  121  135  138  152  159
...
[241] 2018 2021 2023 2027 2035 2039 2046 2124 2193 2239 2263

$span
[1] 2337

$threshold
[1] 0.025

$p.less.thresh
```

```
[1] 0.8926433

$n.exceed
[1] 251

$run
[1] NA

$par.ests
        xi      sigma         mu       beta
 0.30997247  0.01736509 -0.03085331  0.03467808

$par.ses
        xi      sigma         mu
0.078626496 0.004227644 0.008697850

$varcov
             [,1]         [,2]         [,3]
[1,]  0.0061821258 -3.134048e-04  5.827642e-04
[2,] -0.0003134048  1.787297e-05 -3.521319e-05
[3,]  0.0005827642 -3.521319e-05  7.565260e-05

$intensity
[1] 0.1074027

$nllh.final
[1] 296.0591

$converged
[1] 0

attr(,"class")
[1] "potd"
> plot(m3)

Make a plot selection (or 0 to exit):

1: plot: Point Process of Exceedances
2: plot: Scatterplot of Gaps
3: plot: Qplot of Gaps
4: plot: ACF of Gaps
5: plot: Scatterplot of Residuals
6: plot: Qplot of Residuals
7: plot: ACF of Residuals
8: plot: Go to GPD Plots
Selection: 8
```

```
Make a plot selection (or 0 to exit):

1: plot: Excess Distribution
2: plot: Tail of Underlying Distribution
3: plot: Scatterplot of Residuals
4: plot: QQplot of Residuals

Selection: 1
[1] "threshold = 0.025   xi = 0.31   scale = 0.0347   location = 0.025"

> riskmeasures(m3,c(0.95,0.99,0.999))
        p   quantile     sfall
[1,] 0.950 0.05490012 0.1185879
[2,] 0.990 0.14661115 0.2514971
[3,] 0.999 0.38981200 0.6039480

> mgpd=gpd(nepcg,threshold=0.025)
> names(mgpd)
 [1] "n"            "data"          "threshold"     "p.less.thresh"
 [5] "n.exceed"     "method"        "par.ests"      "par.ses"
 [9] "varcov"       "information"   "converged"     "nllh.final"
> mgpd
$n
[1] 2338

$data
  [1] 0.14509552 0.04879016 0.13353139 0.05416478 0.02550263 0.05690813
...
[247] 0.02702867 0.04742268 0.30904689 0.04762805 0.09086573

$threshold
[1] 0.025

$p.less.thresh
[1] 0.8926433

$n.exceed
[1] 251

$method
[1] "ml"

$par.ests
       xi      beta
0.30999592 0.03468274
```

```
$par.ses
        xi       beta
0.091297568 0.003781485

$varcov
             [,1]         [,2]
[1,]  0.0083352459 -2.324081e-04
[2,] -0.0002324081  1.429963e-05

$information
[1] "observed"

$converged
[1] 0

$nllh.final
[1] -514.9647

attr(,"class")
[1] "gpd"
> par(mfcol=c(2,2))
> plot(mgpd)

Make a plot selection (or 0 to exit):

1: plot: Excess Distribution
2: plot: Tail of Underlying Distribution
3: plot: Scatterplot of Residuals
4: plot: QQplot of Residuals
> riskmeasures(mgpd,c(0.95,0.99,0.999))
        p   quantile     sfall
[1,] 0.950 0.05490442 0.1186040
[2,] 0.990 0.14663131 0.2515408
[3,] 0.999 0.38988578 0.6040814

>spec=ugarchspec(variance.model=list(model="iGARCH",garchOrder=c(1,1)),mean.mo
del=list(armaOrder=c(0,0),include.mean=FALSE),distribution.model="norm",fixed.pars
=list(omega=0))
> fit=ugarchfit(spec,epcg)
> fit

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*
```

```
Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : iGARCH(1,1)
Mean Model      : ARFIMA(0,0,0)
Distribution    : norm

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega   0.000000         NA       NA       NA
alpha1  0.041657          0   185862        0
beta1   0.958343         NA       NA       NA

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega   0.000000         NA       NA       NA
alpha1  0.041657       4e-06    10000        0
beta1   0.958343         NA       NA       NA

LogLikelihood : 4114.86

Information Criteria
------------------------------------

Akaike       -3.5191
Bayes        -3.5167
Shibata      -3.5191
Hannan-Quinn -3.5182

Q-Statistics on Standardized Residuals
------------------------------------
             statistic p-value
Lag[1]          0.7271  0.3938
Lag[p+q+1][1]   0.7271  0.3938
Lag[p+q+5][5]   6.4800  0.2623
d.o.f=0
H0 : No serial correlation

Q-Statistics on Standardized Squared Residuals
------------------------------------
             statistic p-value
Lag[1]       0.0005967  0.9805
Lag[p+q+1][3] 0.4584741  0.4983
Lag[p+q+5][7] 0.4828566  0.9927
d.o.f=2
```

```
ARCH LM Tests
------------------------------------
            Statistic DoF P-Value
ARCH Lag[2]     0.4571   2  0.7957
ARCH Lag[5]     0.4779   5  0.9929
ARCH Lag[10]    0.4975  10  1.0000

Nyblom stability test
------------------------------------
Joint Statistic:  0.938
Individual Statistics:
alpha1 0.938

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
Joint Statistic:          0.353 0.47 0.748
Individual Statistic:     0.35 0.47 0.75

Sign Bias Test
------------------------------------
                   t-value   prob sig
Sign Bias          1.0403 0.2983
Negative Sign Bias  0.2692 0.7878
Positive Sign Bias  0.2730 0.7849
Joint Effect       1.1305 0.7697


Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
------------------------------------
  group statistic p-value(g-1)
1    20      6263           0
2    30      9329           0
3    40     12053           0
4    50     14558           0


Elapsed time : 0.953125

> predict(fit)
Error in UseMethod("predict") :
  no applicable method for 'predict' applied to an object of class "c('uGARCHfit',
'GARCHfit', 'rGARCH')"
> pred=ugarchforecast(fit,n.ahead=1)
Warning message:
In `setfixed<-`(`*tmp*`, value = list(omega = 0, alpha1 = 0.0416574639128859,  :
  Unrecognized Parameter in Fixed Values: beta1...Ignored
> pred
```

```
*------------------------------------*
*       GARCH Model Forecast         *
*------------------------------------*
Model: iGARCH
Horizon: 1
Roll Steps: 0
Out of Sample: 0

0-roll forecast [T0=1976-05-27 01:00:00]:
   Series   Sigma
T+1      0 0.04951

> library(gogarch)
Loading required package: fGarch
Loading required package: timeDate
Loading required package: timeSeries
Loading required package: fBasics
Loading required package: MASS

Attaching package: 'fBasics'

The following object is masked from 'package:base':

   norm

Loading required package: fastICA
Warning messages:
1: package 'gogarch' was built under R version 3.0.2
2: package 'fastICA' was built under R version 3.0.2
> data1 <- read.delim(file.choose(),header=T)
> data1
        date   return.TECG   return.EPCG
1    09/01/04  0.0000000000  0.0000000000
2    12/01/04  0.0000000000  0.0000000000
3    13/01/04  0.0000000000  0.0000000000…

> dim(data1)
[1] 2338    3

> sectors=data1[,c("return.TECG","return.EPCG")]
> sectors=apply(sectors,2,scale,scale=FALSE)
> gogmm=gogarch(sectors,formula=~garch(1,1),estby="mm",lag.max=100)
> gogmm

****************
```

```
*** GO-GARCH ***
****************

Components estimated by: Methods of Moments
Dimension of data matrix: (2338 x 2).
Formula for component GARCH models: ~ garch(1, 1)

Orthogonal Matrix U:
          [,1]       [,2]
[1,] 0.99979610 -0.02019325
[2,] 0.02019325  0.99979610

Linear Map Z:
           [,1]       [,2]
[1,] 0.0251627015 0.002206049
[2,] 0.0006776067 0.050512627

Estimated GARCH coefficients:
       omega    alpha1     beta1
y1 0.01687122 0.1259446 0.8780425
y2 0.06955095 0.1758064 0.7549963

Convergence codes of component GARCH models:
y1 y2
 1  1
> gognls=gogarch(sectors,formula=~garch(1,1),scale=TRUE,estby="nls")
> gognls

****************
*** GO-GARCH ***
****************

Components estimated by: non-linear Least-Squares
Dimension of data matrix: (2338 x 2).
Formula for component GARCH models: ~ garch(1, 1)

Orthogonal Matrix U:
          [,1]       [,2]
[1,] -0.6505561 -0.7594582
[2,]  0.7594582 -0.6505561

Linear Map Z:
           [,1]       [,2]
[1,]  0.99166914 -0.1271401
[2,] -0.02664207 -0.9994311
```

```
Estimated GARCH coefficients:
       omega    alpha1     beta1
y1 0.07208054 0.1677460 0.7566053
y2 0.01674128 0.1227759 0.8803560

Convergence codes of component GARCH models:
y1 y2
 1  1

> library(vars)
Loading required package: strucchange
Loading required package: zoo

Attaching package: 'zoo'

The following object is masked from 'package:timeSeries':

   time<-

The following object is masked from 'package:base':

   as.Date, as.Date.numeric

Loading required package: sandwich
Loading required package: urca
Loading required package: lmtest
Warning messages:
1: package 'vars' was built under R version 3.0.2
2: package 'strucchange' was built under R version 3.0.2
3: package 'zoo' was built under R version 3.0.2
4: package 'sandwich' was built under R version 3.0.2
5: package 'lmtest' was built under R version 3.0.2
> var1=VAR(scale(sectors),p=1,type="const")
> resid=residuals(var1)
>gogml=gogarch(resid,~garch(1,1),scale=TRUE,estby="ml",control=list(iter.max=1000)
)
> gogml

****************
*** GO-GARCH ***
****************

Components estimated by: maximum likelihood
Dimension of data matrix: (2337 x 2).
Formula for component GARCH models: ~ garch(1, 1)
```

```
Orthogonal Matrix U:
          [,1]       [,2]
[1,] 0.7232011 -0.6906375
[2,] 0.6906375  0.7232011

Linear Map Z:
            [,1]        [,2]
[1,] -0.07583917 -0.99690547
[2,] -0.99933998 -0.02986145

Estimated GARCH coefficients:
       omega    alpha1     beta1
y1 0.06956504 0.1761914 0.7582729
y2 0.01693469 0.1217630 0.8802362

Convergence codes of component GARCH models:
y1 y2
 1  1
> solve(gogml@Z)
            [,1]        [,2]
[1,]  0.03004222 -1.00294034
[2,] -1.00538958  0.07629827
> solve(gogmm@Z)
           [,1]      [,2]
[1,] 39.7881548 -1.737677
[2,] -0.5337422 19.820340
> solve(gognls@Z)
            [,1]       [,2]
[1,]  1.00496620 -0.1278442
[2,] -0.02678962 -0.9971613
> goinit(resid,scale=TRUE)

******************************
*** Object of class Goinit ***
******************************

Head of data matrix X:
  return.TECG return.EPCG
1 -0.03292977 -0.06276003
2 -0.03292977 -0.06276003
3 -0.03292977 -0.06276003
4 -0.03292977 -0.06276003
5 -0.03292977 -0.06276003
6 -0.03292977 -0.06276003

Projection matrix P:
```

```
          [,1]       [,2]
[1,] -0.7071068 -0.7071068
[2,] -0.7071068  0.7071068

Square root of eigenvalues Dsqr:
     [,1]  [,2]
[1,] 1.051 0
[2,] 0     0.9455

Formula for component GARCH models:
 ~ garch(1, 1)
> showClass("Goinit")
Class "Goinit" [package "gogarch"]

Slots:

Name:         X         V         P      Dsqr    garchf      name
Class:    matrix    matrix    matrix    matrix   formula character

Known Subclasses:
Class "GoGARCH", directly
Class "Goestica", by class "GoGARCH", distance 2
Class "Goestmm", by class "GoGARCH", distance 2
Class "Goestml", by class "GoGARCH", distance 2
Class "Goestnls", by class "GoGARCH", distance 2
> gin=goinit(resid,scale=TRUE)
> gotheta(0.5,gin)

****************
*** GO-GARCH ***
****************

Components estimated by:
Dimension of data matrix: (2337 x 2).
Formula for component GARCH models: ~ garch(1, 1)

Orthogonal Matrix U:
          [,1]       [,2]
[1,] 0.8775826 -0.4794255
[2,] 0.4794255  0.8775826

Linear Map Z:
          [,1]       [,2]
[1,] -0.3318115 -0.9431189
[2,] -0.9728857  0.2303596
```

```
Estimated GARCH coefficients:
       omega    alpha1     beta1
y1 0.08015541 0.1735505 0.7537726
y2 0.01850944 0.1198598 0.8776019

Convergence codes of component GARCH models:
y1 y2
 1  1
> plot(data1)
> plot(data1[,2])
> plot(data1[,3])
> plot(resid)
> plot(gogml)
> predict(gogml)

***********************************
*** Forecasts of GO-GARCH Model ***
***********************************

Conditional variances:
    V.return.TECG.f V.return.EPCG.f
2338       0.8517462       0.9380335
2339       0.8703146       0.9460985
2340       0.8889170       0.9536361
2341       0.9075536       0.9606808
2342       0.9262248       0.9672650
2343       0.9449307       0.9734188
2344       0.9636717       0.9791704
2345       0.9824479       0.9845463
2346       1.0012595       0.9895709
2347       1.0201068       0.9942674


Forecasts of Mean Equation:
    return.TECG.f return.EPCG.f
2338             0             0
2339             0             0
2340             0             0
2341             0             0
2342             0             0
2343             0             0
2344             0             0
2345             0             0
2346             0             0
2347             0             0
```

```
> predict(gogmm)

***********************************
*** Forecasts of GO-GARCH Model ***
***********************************

Conditional variances:
     V.return.TECG.f V.return.EPCG.f
2339    0.0005571588     0.002289225
2340    0.0005700815     0.002308315
2341    0.0005830530     0.002326084
2342    0.0005960737     0.002342625
2343    0.0006091440     0.002358022
2344    0.0006222644     0.002372354
2345    0.0006354350     0.002385695
2346    0.0006486562     0.002398114
2347    0.0006619285     0.002409674
2348    0.0006752521     0.002420435


Forecasts of Mean Equation:
     return.TECG.f return.EPCG.f
2339             0             0
2340             0             0
2341             0             0
2342             0             0
2343             0             0
2344             0             0
2345             0             0
2346             0             0
2347             0             0
2348             0             0

> ccor(gogmm)
Time Series:
Start = 1
End = 2338
Frequency = 1
       return.EPCG & return.TECG
   [1,]              0.09995293
   [2,]              0.09710560
   [3,]              0.09492202
   [4,]              0.09336058
   [5,]              0.09237526
   [6,]              0.09191681
   [7,]              0.09193397
```

```
  [8,]          0.09237438…
 [2331,]          0.09190443
[2332,]          0.08918270
[2333,]          0.08702852
[2334,]          0.12479982
[2335,]          0.11870406
[2336,]          0.12538025
[2337,]          0.11954516
[2338,]          0.10746773

> predict(gognls)

***********************************
*** Forecasts of GO-GARCH Model ***
***********************************

Conditional variances:
    V.return.TECG.f V.return.EPCG.f
2339       0.8800239       0.8762836
2340       0.8857228       0.8957522
2341       0.8910154       0.9152815
2342       0.8959325       0.9348716
2343       0.9005026       0.9545229
2344       0.9047520       0.9742354
2345       0.9087051       0.9940095
2346       0.9123844       1.0138453
2347       0.9158106       1.0337430
2348       0.9190030       1.0537029


Forecasts of Mean Equation:
    return.TECG.f return.EPCG.f
2339             0             0
2340             0             0
2341             0             0
2342             0             0
2343             0             0
2344             0             0
2345             0             0
2346             0             0
2347             0             0
2348             0             0

> cor(sectors)
           return.TECG return.EPCG
return.TECG   1.0000000   0.1006907
```

return.EPCG 0.1006907 1.0000000